Линейные диофантовы уравнения [1]

Г.И. Фалин
д.ф.м.н., профессор
кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ им.М.В.Ломоносова

А.И. Фалин
к.ф.м.н., доцент
кафедра общей математики
факультет ВМК
МГУ им.М.В.Ломоносова

[1]Г.Фалин, А.Фалин. Линейные диофантовы уравнения. М., Изд-во Чистые Пруды, 2008, 32 с. (библиотечка "Первого Сентября", серия математика, вып.24). ISBN 978-5-9667-0510-7.

Оглавление

Глава 1

Введение

Линейным диофантовым[1] уравнением называют уравнение с несколькими неизвестными вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$, где (известные) коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ и c – целые числа, а неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ также являются целыми числами. К решению подобных уравнений сводятся разнообразные текстовые задачи, в которых неизвестные величины выражают количество предметов того или иного рода и потому являются натуральными (или неотрицательными целыми) числами.

Теория решения подобных уравнений является классическим разделом элементарной математики. В ней не приходится писать сложные и громоздкие формулы, а необходимо проводить аккуратные рассуждения, базирующиеся на определенных понятиях теории чисел и связанные в стройную логическую конструкцию. В рамках этой теории можно дать исчерпывающее решение рассматриваемого класса задач с четко описанным алгоритмом получения ответа. Именно этими чертами характеризуется хорошая математическая теория.

Конкретные задачи такого рода были решены еще в Древнем Вавилоне около 4 тысяч лет тому назад. Древнегреческий мыслитель Диофант, который жил около 2 тысяч лет тому назад, в своей книге "Ариф-

[1] Диофант (Александрийский) – древнегреческий математик, живший в 3 веке до нашей эры. В своем основном труде "Арифметика", состоящем из 13 книг, он дал решение большого числа задач и, в частности, уравнений, которые теперь называют его именем. Из "Арифметики"до наших дней дошли 6 книг. Они переведены на русский язык: Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. Перевод с древнегреческого Ю.Н.Веселовского. Редакция и комментарии И.Г.Башмаковой. М., Наука, 1974 — 328 с.

метика” решил большое число таких и более сложных уравнений в целых числах и в сущности описал общие методы их решения.

В школьных учебниках эта тема затрагивается вскользь, да и то лишь в 8 классе, в то время как задачи, где требуется решать уравнения описанного типа, относительно часто предлагаются на вступительных экзаменах.

В этой брошюре на примерах решения конкретных экзаменационных задач МГУ им.М.В.Ломоносова мы расскажем об основных результатах и методах теории линейных диофантовых уравнений. Поскольку, за редким исключением, на экзаменах предлагаются уравнения с двумя неизвестными, мы в ограничимся этим случаем, т.е. будем рассматривать уравнения вида $ax + by = c$. Это позволит упростить теоретические рассмотрения, не ограничивая, в сущности, общности описываемых методов (мы продемонстрируем это в задаче 13 на примере конкретного уравнения вида $ax + by + cz = d$).

Следует отметить, что каждая конкретная задача в целых числах может решаться с помощью разных методов. Целью нашей работы является демонстрация возможностей теории линейных диофантовых уравнений.

Глава 2

Однородные уравнения

Прежде всего мы рассмотрим однородные линейные уравнения, т.е. уравнения вида $ax+by=0$, все члены которого являются одночленами первой степени.

Если коэффициенты a и b имеют общий делитель d, то обе части уравнения $ax+by=0$ можно сократить на d. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что числа a и b – взаимно простые.

Рассмотрим, например, уравнение

$$80x + 126y = 0.$$

Разложим коэффициенты $a = 80$ и $b = 126$ на простые множители: $a = 2^4 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Поэтому наибольший общий делитель чисел $a = 80$ и $b = 126$ равен 2 и после сокращения на 2 мы получим уравнение

$$40x + 63y = 0, \tag{2.1}$$

в котором коэффициенты $a = 40 = 2^3 \cdot 5$ и $b = 63 = 3^2 \cdot 7$ являются взаимно простыми целыми числами.

Разложение на простые множители коэффициентов уравнения, которое мы использовали для сокращения на наибольший общий делитель, можно использовать и для завершения решения. Перепишем уравнение (2.1) в виде:

$$2^3 \cdot 5 \cdot x = -3^2 \cdot 7 \cdot y. \tag{2.2}$$

Левая часть уравнения (2.2) делится на $2^3 \cdot 5$. Поэтому и правая часть, которая равна левой, должна делиться на $2^3 \cdot 5$, а это возможно тогда и только тогда, когда неизвестная y делится на $2^3 \cdot 5$:

$$y = 2^3 \cdot 5 \cdot u = 40u, \tag{2.3}$$

где u – некоторое целое число.

Аналогичные рассуждения применимы и к правой части уравнения (2.2). Правая часть делится на $3^2 \cdot 7$. Поэтому и левая часть, которая равна правой, должна делиться на $3^2 \cdot 7$, а это возможно тогда и только тогда, когда неизвестная x делится на $3^2 \cdot 7$:

$$x = 3^2 \cdot 7 \cdot v = 63v, \tag{2.4}$$

где v – некоторое целое число.

Равенства (2.3) и (2.4) фактически вводят новые целочисленные неизвестные u, v вместо основных неизвестных x, y. Для новых неизвестных уравнение (2.2) примет вид: $u = -v$. Множество решений этого уравнения состоит из бесконечного количества пар

$$\ldots, (-3; 3), (-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; -1), (2; -2), (3; -3), \ldots$$

Иначе говоря, этому уравнению удовлетворяют все пары (u, v) вида $(-n, n)$, где n – произвольное целое число и только они. Переменная n в этих формулах является своеобразным "номером" решения.

Возвращаясь к основным неизвестным x и y, мы получим, что множество решений уравнения (2.2) можно записать в виде: $x_n = 63n$, $y_n = -40n$, где n – произвольное целое число.

Как ясно из приведенного решения уравнения (2.2) , оно совершенно не привязано к точным значениям коэффициентов a и b и не изменится, если вместо чисел $a = 40$, $b = 63$ рассмотреть произвольные взаимно простые числа. Таким образом, справедлива следующая теорема, которая дает полное решение диофантовых уравнений вида $ax + by = 0$.

Теорема 1 *Если числа a и b – взаимно простые, то уравнение $ax+by = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством целых чисел Z (т.е. могут быть занумерованы целыми числами), и описываются формулой: $x_n = bn$, $y_n = -an$, где $n \in Z$ – "номер" решения.*

Эта теорема часто встречается при решении разнообразных задач на целые числа и мы рекомендуем абитуриентам запомнить ее формулировку.

В качестве простого примера применения теоремы 1 рассмотрим следующую задачу.

Задача 1 (ф-т почвоведения, 2003, май, №4) *Найти все целочисленные решения уравнения*

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

Решение задачи 1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0$$

как квадратное уравнение относительно одной неизвестной x:

$$x^2 + 2x(y - 5z) + 5y^2 + 34z^2 - 22yz = 0.$$

Тогда

$$\frac{D}{4} = (y - 5z)^2 - (5y^2 + 34z^2 - 22yz) = -(2y - 3z)^2.$$

Если это уравнение имеет решение, то дискриминант должен быть неотрицательным, что возможно только в случае $2y - 3z = 0$. Тогда дискриминант равен 0 и уравнение имеет единственное решение $x = 5z - y$.

Итак, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2y - 3z = 0, \\ x = 5z - y. \end{cases}$$

Общее решение первого уравнения в целых числах дается формулами $y = 3n$, $z = 2n$, где $n \in Z$. Из второго уравнения теперь можно найти x (причем x автоматически будет целым числом): $x = 7n$.

Таким образом, исходное уравнение имеет бесконечно много целочисленных решений, которые могут быть описаны формулой $(x; y; z) = (7n; 3n; 2n)$, $n \in Z$.

Ответ: $(x; y; z) = (7n; 3n; 2n)$, $n \in Z$. $\square$

Глава 3

Общие линейные уравнения

В этом разделе мы будем рассматривать диофантовы уравнения вида $ax + by = c$.

Прежде всего отметим, что, вообще говоря, такое уравнение может и не иметь целочисленных решений.

Действительно, допустим, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение. Если коэффициенты a и b имеют общий делитель $d > 1$, то число $ax+by$, которое стоит в левой части, можно без остатка разделить на d. Поэтому и правую часть уравнения, т.е. свободный член c, можно без остатка разделить на d. Иначе говоря, справедлива следующая теорема

Теорема 2 *Если наибольший общий делитель d коэффициентов a и b больше 1, а свободный член c не делится на d, то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых числах.*

Это простое утверждение часто используется, например, для доказательства иррациональности чисел, записанных с использованием радикалов.

Задача 2 (ВМК, устный, 1998) *Доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом.*

Решение задачи 2. Допустим противное, что $\sqrt[3]{2}$ – число рациональное. Тогда существуют натуральные m, n такие, что

$$\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}.$$

Избавляясь от радикала и дроби, получим

$$n^3 = 2m^3. \tag{3.1}$$

Разложим числа m и n на простые множители (мы явно указываем только простой множитель 2):

$$\begin{aligned} m &= 2^x \cdot \ldots \\ n &= 2^y \cdot \ldots \end{aligned}$$

где x, y – неотрицательные целые числа (отсутствие простого множителя 2 в разложении означает, что соответствующий показатель степени равен 0).

Тогда равенство (3.1) примет вид:

$$2^{3y} \cdot \ldots = 2^{3x+1} \cdot \ldots$$

В силу единственности разложения натурального числа на простые множители

$$3y = 3x + 1 \Leftrightarrow 3(y - x) = 1.$$

Последнее уравнение является линейным диофантовым уравнением вида $ax + by = c$, причем коэффициенты $a = -3$, $b = 3$ делятся на 3, в то время как свободный член $c = 1$ – нет. Значит, это уравнение не имеет целочисленных решений, что означает ложность исходного предположения о рациональности числа $\sqrt[3]{2}$. □

Будем теперь рассматривать только такие уравнения вида $ax+by = c$, в которых свободный член c делится на $d =$ НОД(a, b). После деления обеих частей уравнения на d мы получим уравнение того же вида, но уже со взаимно простыми коэффициентами при неизвестных. Только такие уравнения мы будем рассматривать ниже в этом разделе.

В этом случае со стороны теоремы 2 нет препятствий к тому, чтобы уравнение имело целочисленные решения. Но отсюда, конечно, не следует, что решения обязаны быть.

На самом деле ответ на этот вопрос положительный:

Теорема 3 *Любое уравнение $ax+by = c$, где НОД$(a, b) = 1$, имеет хотя бы одно решение в целых числах.*

Доказательство теоремы Уравнение $ax + by = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда число c входит в область значений $\mathcal{M}$ функции $f(x, y) = ax + by$ от двух целочисленных аргументов x, y. Поэтому наша теорема фактически утверждает, что $\mathcal{M} = Z$. Именно этот факт мы и будем доказывать.

Прежде всего отметим, что множество $\mathcal{M}$ содержит бесконечно много чисел, например, $0 = f(0, 0)$, $a = f(1, 0)$, $-a = f(-1, 0)$, $a + b = f(1, 1)$ и т.д. Поскольку $f(-x, -y) = -f(x, y)$, это множество имеет вид:

$$\{\dots, -n_2, -n_1, 0, n_1, n_2, \dots\},$$

где $n_1 < n_2 < \dots$ – натуральные числа.

Рассмотрим наименьшее положительное число из $\mathcal{M}$, т.е. n_1, и докажем, что оно равно 1. Для этого разделим число $|a|$ на n_1 с остатком, т.е. найдем такие целые числа q (неполное частное) и r (остаток), что $|a| = n_1 q + r$, причем $0 \le r < n_1$. Поскольку число n_1 принадлежит множеству $\mathcal{M}$, для некоторых целых x_0 и y_0 верно равенство $n_1 = ax_0 + by_0$. Кроме того, $|a| = \operatorname{sgn}(a) \cdot a$, где $\operatorname{sgn}(a) = +1$, если $a > 0$, и $\operatorname{sgn}(a) = -1$, если $a < 0$. Тогда

$$r = |a| - n_1 q = \operatorname{sgn}(a) \cdot a - (ax_0 + by_0) \cdot q = ax + by,$$

где $x = \operatorname{sgn}(a) - x_0 q$, $y = -y_0 q$ – некоторые целые числа. Поэтому неотрицательное целое число r также принадлежит множеству $\mathcal{M}$. Если бы число r было положительным, то условие $0 \le r < n_1$, которому удовлетворяет r как остаток от деления на n_1, означало, что в множестве $\mathcal{M}$ есть положительное число, меньшее, чем n_1, чего быть не может. Значит, $r = 0$, т.е. $|a|$ (а вместе с ним и a) делится без остатка на n_1.

Аналогичные рассуждения показывают, что и b делится без остатка на n_1. Следовательно, n_1 – общий делитель чисел a и b, а поскольку эти числа взаимно простые, число n_1 равно 1.

Функция $f(x, y) = ax + by$ обладает свойством: $f(kx, ky) = k \cdot f(x, y)$. Поэтому, если некоторое число $c \in \mathcal{M}$, то и число $kc \in \mathcal{M}$. Как мы установили, $1 \in \mathcal{M}$. Значит, и любое целое число k входит в $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{M} = Z$. Это и означает справедливость нашей теоремы. $\square$

Имея в виду более сложные задачи, мы в качестве простого следствия из доказанной теоремы 3 получим еще одну важную теорему.

Теорема 4 *Если число a и b – целые, то множество значений функции $f(x, y) = ax + by$ от двух целочисленных аргументов x и y совпадает с множеством чисел, кратных $d \equiv$ НОД(a, b), т.е. с множеством $\{\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots\}$.*

Доказательство теоремы Так как $d =$ НОД(a, b), числа a и b можно записать в виде: $a = da'$, $b = db'$, причем числа a', b' – взаимно простые. Тогда $f(x, y) = d \cdot (a'x + b'y)$. В силу теоремы 3, любое целое число n можно представить в виде $a'x + b'y$. Поэтому множество чисел, которые могут быть записаны в виде $ax+by$, есть $\{\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots\}$. □

Приведенное доказательство теоремы 3 дает удобный метод нахождения частного (т.е. конкретного) решения при решении конкретных уравнений вида $ax + by = c$ (если a и b – взаимно простые целые числа):

1. нужно образовать две последовательности чисел: – $\dots, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots$ и – $\dots, -2b, -b, 0, b, 2b, \dots$ (обычно достаточно выписать по несколько членов в обе стороны) и расположить их друг под другом так, чтобы положительные члены одной стояли под отрицательными членами другой;

2. затем в уме находить всевозможные суммы пар членов этих последовательностей, пока не найдем пару, дающую в сумме c.

Рассмотрим, например, уравнение $2x - 5y = 1$. Выпишем ряды чисел, кратных коэффициентам $a = 2$ и $b = -5$:

$$\begin{array}{ccccccc} -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 15 & 10 & 5 & 0 & -5 & -10 & -15. \end{array}$$

Из этой таблицы ясно, что второе число из первой строки (т.е. -4), которое соответствует $x = -2$, и третье число из второй строки (т.е. 5), которое соответствует $y = -1$, и дают в сумме 1. Таким образом, уравнение $2x - 5y = 1$ имеет частное решение $x_0 = -2$, $y_0 = -1$. Конечно, эту пару можно найти и проще, просто подставляя в исходное уравнение в уме небольшие числа с тем, чтобы получить верное равенство. Для несложных уравнений обычно поступают именно так.

В ряде случаев приходится выписывать довольно много (несколько десятков) членов последовательностей ax и by. Тогда, конечно, описанный прием не очень удобен, т.к. требует больших затрат времени. В этой ситуации обычно рекомендуют использовать алгоритм Евклида[1] для нахождения наибольшего общего делителя коэффициентов a и b (само доказательство замечательной теоремы 3 также может быть получено с помощью алгоритма Евклида). Мы продемонстрируем этот алгоритм ниже при решении задачи 6.

На примере следующей задачи мы продемонстрируем как с помощью частного решения уравнения $ax + by = c$ можно свести дело к решению соответствующего однородного уравнения $ax + by = 0$ и, применяя теорему 1, получить полное решение.

Задача 3 (филологический ф-т, 1969, №3) *Остаток от деления некоторого натурального числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?*

Решение задачи 3. Тот факт, что остаток от деления числа n на 6 равен 4, означает, что существует неотрицательное целое x такое, что $n = 6x + 4$. Аналогично, существует неотрицательное целое y такое, что $n = 15y + 7$. Исключая из этих равенств число n, для x и y получим уравнение

$$2x - 5y = 1. \tag{3.2}$$

Чтобы решить это уравнение, прежде всего найдем какое-нибудь частное решение в целых (не обязательно неотрицательных) числах. Мы это уже сделали выше, когда разбирали пример, иллюстрирующий метод поиска частных решений линейных диофантовых уравнений; в нашем случае в качестве такого частного решения можно взять, например, $x_0 = -2$, $y_0 = -1$, так что верно равенство:

$$2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) = 1. \tag{3.3}$$

Вычитая из уравнения (3.2) равенство (3.3), получим:

$$2(x + 2) = 5(y + 1).$$

Общее решение этого уравнения в целых числах имеет вид: $x + 2 = 5k$, $y + 1 = 2k$, где k – произвольное целое число. Чтобы числа x и y были неотрицательными, параметр k должен быть натуральным числом.

---

[1] Евклид (Эвклид) – знаменитый древнегреческий математик, живший в 3 веке до нашей эры. Он написал знаменитый труд "Начала"(из 15 книг), в котором изложил основные достижения античной математики. Книги 7-9 "Начал"посвящены теории чисел. В них, в частности, появился алгоритм Евклида и доказана теорема о бесконечности множества простых чисел.

Теперь для числа n имеем:

$$n = 6x + 4 = 6(5k - 2) + 4 = 30k - 8 = 30(k - 1) + 22.$$

Поскольку целое число $(k - 1)$ неотрицательно, это равенство означает, что остаток от деления n на 30 равен 22. **Ответ**: 22. □

Задача 4 (социологический ф-т, 2005, апрель, №6) *Фирма продавала чай в центре города по 7 рублей, а кофе по 10 рублей стакан, на вокзале по 4 рубля и 9 рублей, соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?*

Решение задачи 4. Пусть n и m соответственно – количество стаканов чая и кофе, проданных в центре города. Тогда количество стаканов чая и кофе, проданных на вокзале, будет равно $20 - n$ и $20 - m$ соответственно. По смыслу задачи переменные n и m – неотрицательные целые числа, не превосходящие 20: $n, m = 0, 1, \ldots, 20$.

Общая выручка в центре равна $7n + 10m$ рублей, а на вокзале равна $4(20 - n) + 9(20 - m)$ рублей. По условию эти величины равны:

$$7n + 10m = 4(20 - n) + 9(20 - m) \Leftrightarrow 11n + 19m = 260.$$

Уравнение $11n + 19m = 260$ решим обычным приемом:

1. найдем частное решение; им будет, например, $n_0 = 15$, $m_0 = 5$.

2. вычитая из равенства $11n+19m = 260$ равенство $11\cdot 15+19\cdot 5 = 260$, мы получим однородное уравнение: $11(n - 15) = 19(5 - m)$.

3. общее решение этого однородного уравнения в целых числах имеет вид: $n - 15 = 19k$, $5 - m = 11k$, где $k \in Z$. Соответственно, общее решение исходного уравнения в целых числах имеет вид: $n = 15 + 19k$, $m = 5 - 11k$, где $k \in Z$.

Поскольку $n, m \geq 0$, параметр k может быть равен только 0. Поэтому найденное в начале решения частное решение будет единственным решением исходного уравнения в неотрицательных целых числах: $n = 15$,

$m = 5$. Так как это решение, кроме того, удовлетворяет условию $n, m \leq 20$, найденное значение $m = 5$ и будет ответом задачи.

Ответ: 5 стаканов. $\square$

Практически дословное повторение рассуждений, проведенных при решении задач 3 и 4, позволяет доказать, что общее решение уравнения $ax + by = c$ представляет собой сумму частного решения $(x_0; y_0)$ этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения $ax+by = 0$. Отсюда, в свою очередь, вытекает следующая важная общая теорема.

Теорема 5 *Если числа a и b – взаимно простые, то уравнение $ax+by = c$ имеет бесконечно много решений в целых числах, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством целых чисел Z (т.е. могут быть занумерованы целыми числами), и описываются формулой: $x_n = x_0 + bn$, $y_n = y_0 - an$, где $n \in Z$ – "номер" решения, а x_0, y_0 – частное решение (которое существует в силу теоремы 3).*

Важно подчеркнуть, что в рассмотренном методе решения уравнений вида $ax+by = c$ частное решение мы ищем только для того, чтобы свести дело к однородному уравнению. Иногда, как, например, в следующей задаче, этого можно добиться и проще.

Задача 5 (высшая школа бизнеса МГУ, 2005, июль, №3) *Найдите все наборы натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\begin{cases} 11x - 6y = z, \\ z - y = 7, \\ x \leq 20. \end{cases}$$

Решение задачи 5. Исключим z из второго уравнения системы: $z = y + 7$. Тогда первое уравнение примет вид:

$$11x - 6y = y + 7 \Leftrightarrow 11x - 7y = 7.$$

Если перенести свободный член 7 из правой части в левую и сгруппировать члены $7y$ и 7, то мы получим уравнение

$$11x - 7(y + 1) = 0,$$

которое является однородным относительно x и $u = y+1$. В силу теоремы 1 его общее решение в целых числах имеет вид: $x = 7n$, $y+1 = 11n$, где n – произвольное целое число. Соответственно, $(x, y) = (7n, 11n-1)$, $n \in Z$. Чтобы x и y были натуральными, должны быть выполнены условия $7n > 0$, $11n - 1 > 0$, что равносильно тому, что n – натуральное число. Если y – натуральное число, то $z = y + 7$ автоматически будет натуральным.

Итак, общее решение системы из двух первых уравнений в натуральных числах имеет вид: $(x, y, z) = (7n, 11n-1, 11n+6)$, где n – произвольное натуральное число.

Дополнительное условие, что $x \leq 20$ означает, что параметр $n \leq 2$. Итак, для n есть всего два возможных значения: 1 и 2. Им соответствует два набора неизвестных (x, y, z): $(7; 10; 17)$ и $(14; 21; 28)$.

Ответ: $(7; 10; 17)$, $(14; 21; 28)$. □

Теперь решим более трудные задачи.

Задача 6 (ф-т государственного управления, 2005, июль, №5) *Тёма сделал несколько мелких покупок в супермаркете, имея при себе сто рублей. Давая сдачу с этой суммы кассир ошиблась, перепутав местами цифры, и выплатила рублями то, что должна была вернуть копейками, и, наоборот, копейками то, что полагалось вернуть рублями. Купив в аптеке набор пипеток за 1 руб. 40 коп., Тёма обнаружил ошибку кассира и, пересчитав деньги, нашел, что оставшаяся у него сумма втрое превышает ту, которую ему должны были вернуть в супермаркете. Какова стоимость всех покупок Тёмы.*

Решение задачи 6. Пусть правильная сдача равна n рублей и m копеек, т.е. $100n+m$ копеек. Реально кассирша выплатила сумму m рублей и n копеек, т.е. $100m + n$ копеек. После покупки пипеток у Темы останется $100m + n - 140$ копеек. По условию эта сумма в три раза больше, чем $100n + m$. Это дает следующее уравнение для неизвестных n и m:

$$100m + n - 140 = 3 \cdot (100n + m) \Leftrightarrow 97m - 299n = 140. \qquad (3.4)$$

Поскольку число копеек не может быть больше, чем 99, справедливо двойное неравенство: $1 \leq n, m \leq 99$. Оно, в частности, влечет, что сдача не превышает первоначальную сумму в 100 рублей, которая была у Темы.

Хотя уравнение (3.4) является стандартным уравнением в целых числах вида $ax + by = c$, найти его частное решение (чтобы свести дело к однородному уравнению) простым подбором весьма непросто. На этом примере мы продемострируем общий метод поиска частного решения (алгоритм Евклида), который автоматически приводит к успеху.

Рассмотрим коэффициенты при неизвестных ($a = 97$ и $b = 299$) и разделим больший коэффициент на меньший. В результате мы получим неполное частное 3 и остаток 8. Иначе говоря, справедливо равенство: $299 = 3 \cdot 97 + 8$ или, что то же самое, $8 = 299 - 3 \cdot 97$.

Теперь заменим больший коэффициент (т.е. 299) на остаток (т.е. 8) и проделаем с парой 97, 8 ту же процедуру: разделим 97 на 8. В результате мы получим неполное частное 12 и остаток 1. Иначе говоря, справедливо равенство: $97 = 12 \cdot 8 + 1$ или, что то же самое, $1 = 97 - 12 \cdot 8$. Заменим в этом равенстве число 8 выражением $299-3\cdot97$, найденным в предыдущем абзаце:

$$1 = 97 - 12 \cdot (299 - 3 \cdot 97) = 37 \cdot 97 - 12 \cdot 299.$$

Итак, мы представили число 1 (это наибольший общий делитель чисел 97 и 299) в виде линейной комбинации чисел 97 и 299. Умножая последнее равенство на 140, мы получим искомое частное решение уравнения (3.4): $m_0 = 37 \cdot 140 = 5180$, $n_0 = 12 \cdot 140 = 1680$.

Это частное решение обычным образом приводит к следующему общему решению уравнения (3.4) в целых числах:

$$\begin{cases} n = 1680 + 97k, \\ m = 5180 + 299k, \ \ k \in Z. \end{cases}$$

Условия $1 \le n, m \le 99$ однозначно определяют значение параметра k: $k = -17$, что приводит к следующим значениям основных неизвестных n и m: $n = 31$, $m = 97$.

Поэтому стоимость всех покупок Темы (в рублях) равна $100-31,97+1,40 = 69,43$.

Проблему с поиском частного решения можно обойти с помощью следующего способа решения уравнения (3.4) (этот метод работает для любого уравнения вида $ax + by = c$ и, в сущности, является вариантом алгоритма Евклида).

Выразим неизвестную с меньшим коэффициентом (в нашем случае это m) через другую неизвестную:

$$m = \frac{299n + 140}{97}$$

и выделим целую часть из дробей $\frac{299}{97}$, $\frac{140}{97}$:

$$m = 3n + 1 + \frac{8n + 43}{97}.$$

Введем новую неизвестную m_1 (вместо m) по формуле $m_1 = m - 3n - 1$. Для нее последнее равенство примет вид:

$$97m_1 = 8n + 43.$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и исходное. Применим к нему процедуру, описанную в предыдущем абзаце: выразим неизвестную с меньшим коэффициентом (в нашем случае это n) через другую неизвестную:

$$n = \frac{97m_1 - 43}{8}$$

и выделим целую часть из дробей $\frac{97}{8}$, $\frac{43}{8}$:

$$n = 12m_1 - 5 + \frac{m_1 - 3}{8}.$$

Введем новую неизвестную n_1 (вместо n) по формуле $n_1 = n - 12m_1 + 5$. Для нее последнее равенство примет вид:

$$8n_1 = m_1 - 3.$$

Поскольку коэффициент при m_1 равен 1, общее решение этого уравнения в целых числах есть:

$$\begin{cases} n_1 = l, \\ m_1 = 8l + 3, \ \ l \in Z. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным n и m, мы получим общее решение в целых числах уравнения (3.4):

$$\begin{cases} n = n_1 + 12m_1 - 5 = 97l + 31, \\ m = m_1 + 3n + 1 = 299l + 97, \ \ l \in Z. \end{cases}$$

При $l = k + 17$ мы получим общее решение уравнения (3.4), найденное ранее.

Описанный метод решения линейных диофантовых уравнений был известен уже математикам Древней Индии; они называли его ”метод рассеивания”.

Ответ: 69 руб. 43 коп. □

Задача 7 (мех-мат, 2000, июль, №3) *Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй – со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы*

а) встретятся в пункте B;

б) окажутся в одном месте строго между пунктами A и B,

если известно, что первый стартует из пункта A, а второй – из пункта B?

Решение задачи 7. Примем момент старта автобусов в качестве начального и обозначим через t'_n, t''_n – моменты времени, когда первый и второй автобусы в n-й раз окажутся в пункте B.

Поскольку первый автобус стартует из пункта A, к моменту n-го визита в B он пройдет путь $s'_n = 2 + 4(n-1) = 4n-2$ (последовательность s'_n образует арифметическую прогрессию с разностью 4). Поэтому $t'_n = \frac{4n-2}{51}$.

Второй автобус к моменту n-го визита в B пройдет путь $s''_n = 4(n-1) = 4n-4$ (последовательность s''_n также будет арифметической прогрессией с разностью 4). Поэтому $t''_n = \frac{4n-4}{42}$.

Встреча автобусов в пункте B означает, что для некоторых натуральных n и m верно равенство

$$t'_n = t''_m \Leftrightarrow 14n - 17m = -10$$

Рассмотрим его как уравнение относительно n и m и решим его.

В качестве частного решения можно взять, например, $n_0 = 9$, $m_0 = 8$:

$$14 \cdot 9 - 17 \cdot 8 = -10.$$

Вычитая это равенство из уравнения $14n - 17m = -10$, мы получим однородное уравнение:

$$14(n-9) = 17(m-8).$$

Его общее решение в целых числах имеет вид: $n - 9 = 17k$, $m - 8 = 14k$, где $k \in Z$. Отсюда $n = 9 + 17k$, $m = 8 + 14k$. Поскольку нас интересует решение в натуральных числах, возможные значения целочисленного параметра k должны быть неотрицательными: $k \in Z_+$. Переменную k можно интерпретировать как номер встречи автобусов в пункте B (имея в виду, что встречи нумеруются не с 1, а с 0). Момент k-й встречи можно подсчитать как t'_n при $n = 9 + 17k$: $t_k = \frac{4k+2}{3}$. Число встреч за 8 часов равно числу решений неравенства $t_k \le 8$ на множестве $k \in Z_+$:

$$\frac{4k+2}{3} \le 8 \Leftrightarrow k \le \frac{11}{2} \Leftrightarrow k = 0; 1; \ldots; 5.$$

Таким образом, за 8 часов автобусы ровно 6 раз встретятся в пункте B.

Перейдем теперь ко второй части задачи ("сколько раз за 8 часов автобусы окажутся в одном месте строго между пунктами A и B?"). Прежде всего найдем, сколько раз за 8 часов автобусы встретятся в пункте A – эта информация окажется позже нам полезной.

Как и в предыдущем исследовании, примем момент старта автобусов в качестве начального и обозначим через T'_n, T''_n – моменты времени, когда первый и второй автобусы в n-й раз окажутся в пункте A.

Поскольку первый автобус стартует из пункта A, к моменту n-го визита в A он пройдет путь $S'_n = 4(n-1)$ (последовательность S'_n образует арифметическую прогрессию с разностью 4). Поэтому $T'_n = \frac{4n-4}{51}$.

Второй автобус к моменту n-го визита в A пройдет путь $S''_n = 2 + 4(n-1) = 4n - 2$ (последовательность S''_n также будет арифметической прогрессией с разностью 4). Поэтому $T''_n = \frac{4n-2}{42}$.

Встреча автобусов в пункте A означает, что для некоторых натуральных n и m верно равенство

$$T'_n = T''_m \Leftrightarrow 28n - 34m = 11.$$

Левая часть этого уравнения – четное число, а правая – нет. Поэтому оно не имеет решений в целых числах. Следовательно, автобусы никогда не встретятся в пункте A.

Теперь непосредственно перейдем к решению второй части задачи. Для этого введем систему координат на дороге между A и B, выбрав в качестве начала отсчета пункт A, в качестве положительного направления – направление от A к B.

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ – координаты первого и второго автобусов соответственно в момент t. Графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – это ломаные линиии, изображенные на рисунках 3.1 и 3.2 соответственно. Первая ломаная состоит из 102 пар звеньев с угловыми коэффициентами 51 и -51, а вторая – из 84 пар звеньев с угловыми коэффициентами 42 и -42 (на рисунках мы исказили масштаб). Точки A и B на оси ординат имеют координаты 0 и 2 соответственно и соответствуют прохождению через пункты A и B.

Рис. 3.1:

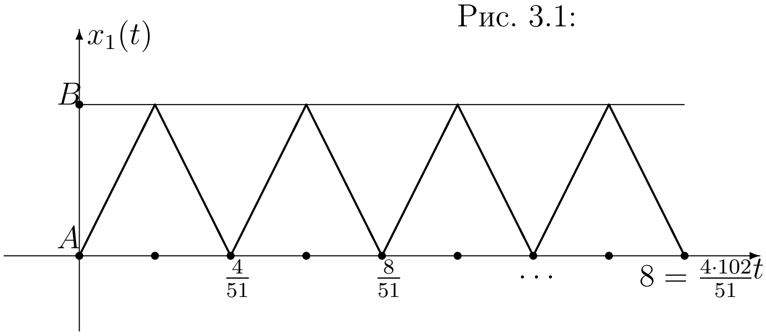
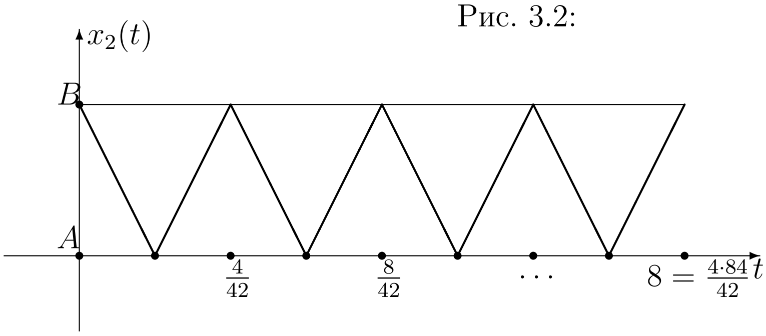


Рис. 3.2:



Встреча автобусов в кокой-то момент t означает совпадение их координат в этот момент: $x_1(t) = x_2(t)$, т.е. пересечение графиков функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Поскольку звенья первой ломаной идут круче звеньев второй ломаной, каждое звено первой ломаной пересекает вторую ломаную ровно в одной точке. Поэтому всего будет 102 точки пересечения возрастающих звеньев первой ломаной со второй ломаной и 102 точки пересечения убывающих звеньев первой ломаной со второй ломаной. Поскольку автобусы не встречаются в пункте A, ни одна из этих точек не будет лежать на оси абсцисс. С другой стороны, поскольку автобусы встречаются 6 раз в пункте B, ровно 6 точек пересечения будет лежать на горизонтальной прямой $y = 2$. Эти точки будут включены как в 102 точки пересечения возрастающих звеньев первой ломаной со второй ломаной, так и в 102 точки пересечения убывающих звеньев первой ломаной со второй ломаной. Поэтому число точек пересечения, лежащих *внутри* полосы $0 < y < 2$ равно $2 \cdot (102 - 6) = 192$.

Ответ: а) 6 раз; б) 192 раза. $\square$

Глава 4

Нелинейные диофантовы системы

Теорию решения линейных диофантовых уравнений можно использовать и для решения более сложных диофантовых уравнений. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 8 (ф-т психологии, 1994, №5) *Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найдите минимальное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.*

Решение задачи 8. Пусть N – число абитуриентов, n – число аудиторий, использовавшихся для проведения экзамена, m – число аудиторий, которые пришлось бы использовать при проведении экзамена в другом корпусе. Условие задачи означает, что эти переменные являются решением системы

$$\begin{cases} N = 3n^2, \\ N = 2m^3. \end{cases}$$

Исключая N, мы получим уравнение

$$3n^2 = 2m^3. \tag{4.1}$$

Разложим n и m на простые множители (из возможных простых множителей мы явно указыаем только 2 и 3):

$$\begin{aligned} n &= 2^x \cdot 3^y \cdot p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}, \\ m &= 2^u \cdot 3^v \cdot p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}. \end{aligned}$$

Некоторые из показателей степеней простых чисел 2, 3, $p_1, \dots, p_k$ могут быть 0. Это означает, что соответствующий простой множитель не входит в разложение.

Подставляя эти разложения в уравнение (4.1), мы получим:

$$2^{2x} \cdot 3^{2y+1} \cdot p_1^{2a_1} \dots p_k^{2a_k} = 2^{3u+1} \cdot 3^{3v} \cdot p_1^{3b_1} \dots p_k^{3b_k}.$$

В силу основной теоремы арифметики, это равенство возможно тогда и только тогда, когда в левой и правой части одинаковые простые множители входят в одинаковых степенях:

$$\begin{cases} 2x = 3u + 1, \\ 2y + 1 = 3v, \\ 2a_1 = 3b_1, \\ \dots \\ 2a_k = 3b_k. \end{cases}$$

Каждое уравнение этой системы можно решить (в неотрицательных целых числах).

Перепишем первое уравнение в виде: $2(x-2) = 3(u-1)$. Его общее решение есть: $x - 2 = 3n$, $u - 1 = 2n$, где $n \in Z_+$.

Второе уравнение равносильно уравнению $2(y-1) = 3(v-1)$, так что его общее решение есть: $y - 1 = 3m$, $v - 1 = 2m$, где $m \in Z_+$.

Для остальных уравнений имеем:

$$\begin{gathered} a_1 = 3n_1, \quad b_1 = 2n_1 \quad n_1 \in Z_+ \\ \dots \\ a_k = 3n_k, \quad b_k = 2n_k \quad n_k \in Z_+ \end{gathered}$$

Для чисел n и m эти соотношения дают:

$$\begin{aligned} n &= 2^{2+3n} \cdot 3^{1+3m} \cdot p_1^{3n_1} \dots p_k^{3n_k} = 12l^3, \\ m &= 2^{1+2n} \cdot 3^{1+2m} \cdot p_1^{2n_1} \dots p_k^{2n_k} = 6l^2, \end{aligned}$$

где $l = 2^n \cdot 3^m \cdot p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ – натуральное число.

Наоборот, если $n = 12l^3$, $m = 6l^2$, где l – некоторое натуральное число, то $3n^2 = 2m^3$, т.е. n и m будут решением уравнения (4.1).

Таким образом, соотношения $n = 12l^3$, $m = 6l^2$, где l – некоторое натуральное число, дают общее решение уравнения (4.1) в натуральных числах. Соответственно, число абитуриентов равно $N = 432l^6$. Минимально возможному числу абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при условиях задачи, соответствует наименьшее возможное значение параметра l, которое, очевидно равно 1.

Ответ: 432. □

Дословное повторение рассуждений, проведённых при решении этой задачи, позволяет доказать следующее интересное утверждение:

Теорема 6 *Уравнение*

$$n^2 = m^3 \tag{4.2}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством целых чисел Z (т.е. могут быть занумерованы целыми числами), и описываются формулой: $n_l = l^3$, $m_l = l^2$, где $l \in Z$ – "номер" решения.

Использование теоремы 6 упрощает решение сложных задач. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 9 (ВМК, устный, 2001) *Найти все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.*

Решение задачи 10. Пусть $\overline{ab}$ – искомое двузначное число (запись $\overline{ab}$ обозначает двузначное число из a десятков и b единиц, так что $\overline{ab} = 10a + b$). Условие задачи означает, что верно равенство

$$\overline{ab}^2 = (a + b)^3,$$

где a и b – цифры, причём $a \neq 0$.

В силу теоремы 6 можно утверждать, что для некоторого целого l верны равенства:

$$\begin{cases} \overline{ab} = l^3, \\ a + b = l^2. \end{cases} \tag{4.3}$$

При этом, так как число $\overline{ab}$ – натуральное, то и параметр l – натуральное число. Куб натурального числа l будет двузначным числом только для $l = 3$ и $l = 4$. В первом случае $\overline{ab} = 27$, так что $a + b = 9 = l^2$, т.е. условие задачи выполнено. Во втором случае $\overline{ab} = 64$, так что $a + b = 10 \neq l^2$, т.е условие задачи не выполнено.

Ответ: 27 $\square$

Глава 5

Экстремумы функций целочисленных переменных

Линейные диофантовы уравнения часто "встраиваются" в различные задачи на нахождение экстремумов функций целочисленных аргументов и изложенная выше теория естественно применяется для их решения.

Задача 10 (олимпиада "Покори Воробьевы Горы", 2007 (10 кл.), №3) *Найдите наименьшее значение выражения* $|33 - 40k - 25n|$ *при целых* k *и* n.

Решение задачи 10. В силу теоремы 4 выражение $40k + 25n$ принимает значения

$$\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots$$

Соответственно, выражение $40k + 25n - 33$ принимает значения

$$\dots, -43, -38, -33, -28, -23, -18, -13, -8, -3, 2, 7 \dots$$

Наименьшим по абсолютной величине значением является 2.

Более формальный выриант последнего этапа этого решения выглядит следующим образом. Поскольку множество значений функции $40k + 25n$ от двух целочисленных переменных k и n совпадает с множеством значений функции $5l$ от одной целочисленной переменной l, задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $f(l) = |5l - 33|$.

Соответствующая функция $f(x) = |5x - 33|$ от непрерывной, т.е. действительной, переменной x при $x \le 6\frac{3}{5}$ убывает, а при $x \ge 6\frac{3}{5}$ возрастает. Поэтому ее наименьшее значение на множестве целых чисел – это $\min(f(6), f(7))$. Поскольку $f(6) = 3$, $f(7) = 2$, искомое наименьшее значение равно 2.

Ответ: 2. □

Задача 11 (мех-мат, 2005, устный) *Пусть q и d – наименьшее общее кратное и, соответственно, наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Найти наименьшее значение величины $q : d$ при условии $3x = 8y - 29$.*

Решение задачи 11. Известно, что для любых натуральных чисел x и y верно равенство

$$x \cdot y = \text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y).$$

Поэтому $q = \frac{xy}{d}$ и наша задача может быть сформулирована в виде:

Найти наименьшее значение величины $\frac{xy}{d^2}$ при условии

$$3x = 8y - 29. \tag{5.1}$$

Теперь решим уравнение (5.1). В соответствии с общей теорией прежде всего найдем частное решение. В качестве частного решения можно взять, например, $x_0 = -7$, $y_0 = 1$:

$$3 \cdot (-7) = 8 \cdot 1 - 29. \tag{5.2}$$

Вычитая из уравнения (5.1) равенство (5.2), мы получим однородное уравнение

$$3 \cdot (x + 7) = 8 \cdot (y - 1).$$

Поскольку числа 3 и 8 – взаимно простые, его общее решение в целых числах имеет вид: $x + 7 = 8n$, $y - 1 = 3n$, где $n \in Z$. Соответственно, общее решения уравнения (5.1) в целых числах есть: $x = 8n - 7$, $y = 3n + 1$, $n \in Z$. Решение в натуральных числах означает дополнительное требование $x > 0$, $y > 0$, что равносильно условию $n \in N$.

Теперь наша задача может быть сформулирована в виде:

Найти наименьшее значение функции натурального аргумента $f(n) = \frac{(8n-7)(3n+1)}{d^2(n)}$, где $d(n) = \text{НОД}(8n-7, 3n+1)$.

Далее, если $3x = 8y - 29$, то $29 = 8y - 3x$. Правая часть этого равенства делится на d. Значит, d – делитель простого числа 29. Поэтому $d(n)$ может быть только 1 или 29.

Разберемся теперь, при каких $n \in Z$ наибольший общий делитель чисел $x = 8n - 7$, $y = 3n + 1$ равен 29. Прежде всего отметим, что из равенства $3x = 8y - 29$ следует, что x делится на 29 тогда и только тогда, когда y делится на 29. Поэтому $d(n) = 29$ тогда и только тогда, когда существует натуральное k такое, что $3n + 1 = 29k$. Это уравнение имеет следующее общее решение (в натуральных числах): $n = 29l - 10$, $k = 3l - 1$, $l \in N$ (мы начинаем с частного решения $n_0 = -10$, $k_0 = -1$). Поэтому $d(n) = 29$ для $n = 29l - 10$, $l \in N$.

Обозначим через N_1 множество тех натуральных чисел n, для которых $d(n) = 1$, а через N_2 – множество тех натуральных чисел n, для которых $d(n) = 29$. Как мы только что установили, $N_2 = \{19, 48, \dots\}$, и, значит, $N_1 = \{1, 2, \dots, 18, 20, \dots, \}$.

Теперь наша задача может быть сформулирована в виде:

Найти наименьшие значения функций $f_1(n) = \frac{(8n-7)(3n+1)}{1}$, где $n \in N_1$, и $f_2(n) = \frac{(8n-7)(3n+1)}{29^2}$, где $n \in N_2$, и из них выбрать меньшее число.

Поскольку функция $(8n - 7)(3n + 1)$ возрастает при $n \geq 1$, $\min f_1 = f_1(1) = 4$, $\min f_2 = f_2(19) = 10$, так что

$$\min(\min f_1, \min f_2) = 4.$$

Ответ: 4. □

Задача 12 (экономический ф-т, отд. менеджмента, 1996, июль, №4) *В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.*

Решение задачи 12. Пусть x и y – число изделий первого и второго типа соответственно. Тогда общий вес изделий равен $12x + 15y$, а их суммарная стоимость – $C = 4x + 6y$ (мы берем 100 тыс. руб. в качестве единицы измерения денежных сумм).

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $C(x, y) = 4x+6y$ при условии, что x и y – натуральные числа, удовлетворяющие соотношению

$$12x + 15y = 321.$$

Решим это уравнение. Прежде всего сократим обе части на 3:

$$4x + 5y = 107. \tag{5.3}$$

Теперь возьмем какое-нибудь частное решение уравнения (5.3) в целых числах, например, $x_0 = -107$, $y_0 = 107$, так что верно равенство:

$$4 \cdot (-107) + 5 \cdot 107 = 107, \tag{5.4}$$

и, наконец, вычтем из уравнения (5.3) равенство (5.4):

$$4(x + 107) = 5(107 - y).$$

Поскольку числа 4 и 5 – взаимно простые, общее решение этого уравнения в целых числах имеет вид:

$$\begin{aligned} x + 107 &= 5n, \\ 107 - y &= 4n, \quad n \in Z. \end{aligned}$$

Соответственно, общее решение уравнения (5.3) в целых числах имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= 5n - 107, \\ y &= 107 - 4n. \quad n \in Z. \end{aligned}$$

Нас интересует решение в натуральных числах. Это означает, что $x > 0$, $y > 0$, т.е.

$$\begin{gathered} 5n - 107 > 0, \\ 107 - 4n > 0. \end{gathered}$$

Отсюда $21\frac{2}{5} < n < 26\frac{3}{4}$. Итак, натуральным решениям соответствуют значения параметра $n = 22, 23, \ldots, 26$.

Используя полученные результаты, мы можем переформулировать исходную задачу следующим образом: найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$C(n) = 4 \cdot (5n - 107) + 6 \cdot (107 - 4n) = 214 - 4n$$

при условии, что параметр $n = 22, 23, \ldots, 26$.

Поскольку зависимость $C(n)$ – линейная с отрицательным угловым коэффициентом, наименьшее значение достигается при $n = 26$, а наибольшее – при $n = 22$.

Ответ: 11000 тыс. руб. и 12600 тыс. руб. □

В следующей задаче, в отличие от предыдущей, приходится анализировать функцию от трёх целочисленных переменных. Хотя общая методика исследования сохраняется, возникают интересные новые особенности, которые мы продемонстрируем на примере следующей задачи.

Задача 13 (экономический ф-т, 1996, июль, №4) *В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.*

Решение задачи 13. Пусть x, y, z – число изделий первого, второго и третьего типа соответственно. Тогда общий вес изделий равен $12x + 16y + 15z$, а их суммарная стоимость – $C = 4x + 5y + 6z$ (мы берем 100 тыс. руб. в качестве единицы измерения денежных сумм).

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $C(x, y, z) = 4x+5y+6z$ при условии, что x, y, z – натуральные числа, удовлетворяющие соотношению

$$12x + 16y + 15z = 326. \tag{5.5}$$

Решим это уравнение. Это можно сделать любым из описанных выше методов. Мы будем использовать метод, основанный на алгоритме Евклида(см. решение задачи 6).

Выразим неизвестную с меньшим коэффициентом (в нашем случае это x) через другие неизвестные:

$$x = \frac{326 - 16y - 15z}{12}$$

и выделим целую часть из дробей $\frac{326}{12}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{15}{12}$:

$$x = 27 - y - z + \frac{2 - 4y - 3z}{12}.$$

Введем новую неизвестную x_1 (вместо x) по формуле $x_1 = x - 27 + y + z$. Тогда уравнение (5.5) относительно трёх неизвестных x, y, z превратится в следующее уравнение относительно трёх неизвестных x_1, y, z:

$$12x_1 = 2 - 4y - 3z. \tag{5.6}$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (5.5). Применим к нему ту же: выразим неизвестную с меньшим коэффициентом (в нашем случае это z) через остальные неизвестные:

$$z = \frac{2 - 4y - 12x_1}{3}$$

и выделим целую часть:

$$z = \frac{2 - y}{3} - y - 4x_1.$$

Введем новую неизвестную z_1 (вместо z) по формуле $z_1 = z + y + 4x_1$. Тогда уравнение (5.6) относительно трёх неизвестных x_1, y, z превратится в следующее уравнение относительно трёх неизвестных x_1, y, z_1:

$$3z_1 = 2 - y \Leftrightarrow y = 2 - 3z_1. \tag{5.7}$$

Поскольку коэффициент при y равен 1, переменная y автоматически будет целой, если z_1 – целое число. Поэтому z_1 – произвольное целое число: $z_1 = u$, где $u \in Z$, а неизвестная y выражается через свободный параметр u по формуле $y = 2 - 3u$. Кроме того, поскольку уравнение (5.7) решается относительно *трёх* неизвестных x_1, y, z_1, а в самом уравнении x_1 отсутствует, неизвестная x_1 может принимать произвольное целочисленное значение: $x_1 = v$, где $v \in Z$ – ещё один свободный параметр.

Итак, общее решение уравнения (5.7) относительно трёх неизвестных x_1, y, z_1 в целых числах есть:

$$\begin{cases} z_1 = u, \\ y = 2 - 3u, \\ x_1 = v, \ \ u, v \in Z. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным x, y, z, мы получим общее решение в целых числах уравнения (5.5):

$$\begin{cases} x = 27 - u + 5v, \\ y = 2 - 3u, \\ z = 4u - 4v - 2, \ \ u, v \in Z. \end{cases} \tag{5.8}$$

Уравнение (5.5) можно было бы решать и методом, аналогичным тому, который мы использовали при решении задачи 3.

Прежде всего найдём какое-нибудь частное решение уравнения (5.5) в целых числах. Поскольку число 326 не делится на 3, а 12 и 15 – делятся, неизвестная y не может быть равна 0.

Пусть $y = 1$. Тогда уравнение примет вид: $12x+15z = 310$. Поскольку 310 не делится на 3, это уравнение не имеет решений.

Пусть $y = 2$. Тогда уравнение примет вид: $12x + 15z = 294$ или после сокращения на 3: $4x + 5z = 98$. Частное решение этого уравнения уже легко найти; ему удовлетворяет, например, пара $x_0 = 2$, $z_0 = 18$.

Итак, частным решением уравнения (5.5) будет $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $z_0 = 18$, так что верно равенство:

$$12 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 15 \cdot 18 = 326, \tag{5.9}$$

Вычтем из уравнения (5.5) равенство (5.9):

$$12(x - 2) + 16(y - 2) + 15(z - 18) = 0. \tag{5.10}$$

Так как числа 12 и 15 делятся на 3, а число 16 – нет, то число $y - 2$ делится на 3: $y - 2 = 3m$. Аналогично, так как 12 и 16 делятся на 4, а 15 – нет, то число $z - 18$ делится на 4: $z - 18 = 4n$. Для неизвестных x, m, n уравнение (5.10) примет вид:

$$x - 2 + 4m + 5n = 0.$$

Поскольку коэффициент при x равен 1, переменная x автоматически будет целой, если m и n – целые числа. Поэтому общее решение в целых числах уравнения (5.5) можно записать в виде::

$$\begin{cases} x = 2 - 4m - 5n, \\ y = 2 + 3m, \\ z = 18 + 4n, \end{cases} \tag{5.11}$$

где m и n – произвольные целые числа.

Если пару (u, v) заменить парой $(-m; -m - n - 5)$, то (5.8) превратится в (5.11), а если пару (m, n) заменить парой $(-u; u - v - 5)$, то (5.11) превратится в (5.8). Следовательно, хотя (5.11) по внешней форме отличается от полученной другим методом формулы (5.8), для общего решения уравнения (5.5), обе формулы задают одно и то же множество троек $(x; y; z)$ целых чисел.

При дальнейшем решении задачи будем исходить из (5.11).

По смыслу задачи неизвестные x, y, z не могут быть отрицательными. Случай, когда какая-то из них равна 0 не исключён; он означает, что комплектующих соответствующего типа в контейнере нет. Поэтому целочисленные параметры m, n являются не произвольными целыми числами, а должны удовлетворять системе

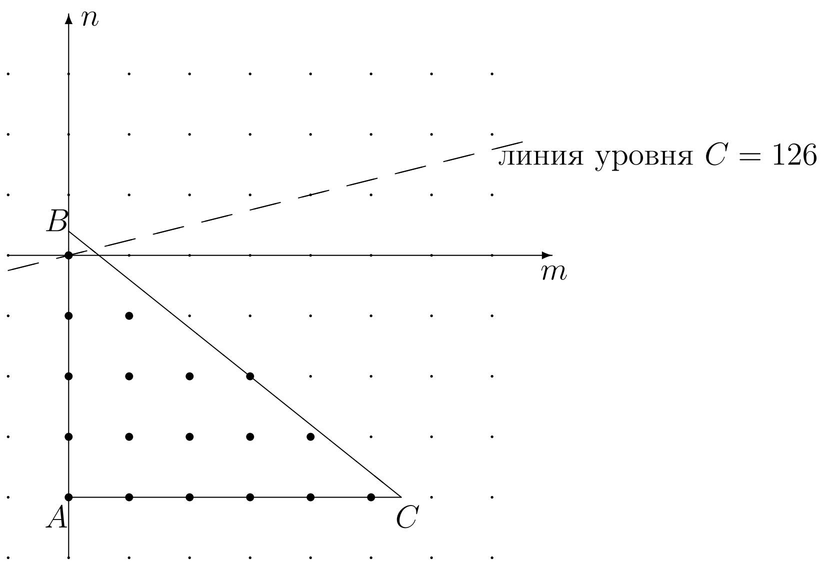
$$\begin{cases} 2 - 4m - 5n \geq 0, \\ 2 + 3m \geq 0, \\ 18 + 4n \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq \frac{2-4m}{5}, \\ m \geq -\frac{2}{3}, \\ n \geq -\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq \frac{2-4m}{5}, \\ m \geq 0, \\ n \geq -4 \end{cases} \tag{5.12}$$

Отметим, что мы можем заменить неравенство $m \geq -\frac{2}{3}$ на неравенство $m \geq 0$, а неравенство $n \geq -\frac{9}{2}$ – на неравенство $n \geq -4$ так как m и n – целые числа.

Если рассматривать m и n как непрерывные переменные, то на координатной плоскости $(m; n)$ первое неравенство системы (5.12)задаёт полуплоскость под прямой $n = \frac{2-4m}{5}$, второе – полуплоскость справа от оси ординат, третье – полуплоскость над горизонтальной прямой $n = -4$, а вся система – треугольник ABC, которая является пересечением этих трёх полуплоскостей (см. рис. 5.1). Координаты точек A, B, C легко находятся как координаты точек пересечения соответствующих прямых: $A\,(0; -4)$, $B\left(0; \frac{2}{5}\right)$, $C\left(\frac{11}{2}; -4\right)$.

Если переменные m и n принимают только целые значения, то всевозможные пары $(m; n)$ задают семейство изолированных точек на плоскости, изображённое на рис. 5.1 (математики обозначают множество этих точек Z^2 и называют двумерной целочисленной решёткой). Внутрь треугольника ABC попадает только 18 точек из Z^2. Они образуют своеобразное "созвездие", которое мы назовём Φ. Каждой точке из множества Φ соответствует один вариант заполнения контейнера комплектующими, при котором их общая масса равна в точности 326 кг.

Рис. 5.1:



Если x, y, z даются (5.11), то выражение $C = 4x + 5y + 6z$, максимум и минимум которого мы должны найти, превратится в функцию двух целочисленных переменных m и n:

$$C = 4(2 - 4m - 5n) + 5(2 + 3m) + 6(18 + 4n) = 126 - m + 4n.$$

Эту функцию мы должны исследовать не для всех пар $(m; n)$, а только для 18 точек из созвездия Φ, изображённого на рис. 5.1.

Функцию $C(m, n) = 126 - m + 4n$, наибольшее и наименьшее значения которой мы должны найти, будем интерпретировать геометрически не с помощью графика (если m, n – непрерывные (т.е. действительные) переменные, он является поверхностью в трехмерном пространстве; в нашем случае – плоскостью), а с помощью понятия линии уровня.

Линия данного уровня C для функции $\ = f(m;n)$ – это множество точек $(m;n)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(m;n) = C$.

В нашем случае линия уровня C – это прямая $n = \frac{C-126+m}{4}$. На рис. 5.1 изображена линия $n = \frac{m}{4}$, соответствующая уровню $C = 126$. Поскольку она пересекается с "созвездием" Φ (в точке $(0;0)$), число $C = 126$ будет значением функции $C = 126 - m + 4n$ при $(m;n) \in \Phi$.

По мере увеличения параметра C прямая $n = \frac{C-126+m}{4}$ будет смещаться вверх и больше не будет пересекаться с "созвездием" Φ. Поэтому $C = 126$ будет наибольшим значением функции $C = 126 - m + 4n$ на множестве Φ. Это значение достигается в точке $m = 0$, $n = 0$, которой соответствует следующий набор комплектующих: $x = 2$, $y = 2$, $z = 18$.

При уменьшении параметра C прямая $n = \frac{C-126+m}{4}$ будет смещаться вниз. Она будет пересекаться с фигурой Φ до тех пор, пока на пройдёт через точку $(5;-4)$. Это равносильно равенству $-4 = \frac{C-126+5}{4}$, откуда $C = 105$. Поэтому $C = 105$ будет наименьшим значением функции $C = 126 - m + 4n$ на множестве Φ. Это значение достигается в точке $m = 5$, $n = -4$, которой соответствует следующий набор комплектующих: $x = 2$, $y = 17$, $z = 2$.

Ответ: 10500 тыс. руб. и 12600 тыс. руб. $\square$

Глава 6

Задачи для самостоятельного решения

1.(экономический ф-т, 1994, №1) Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3, \\ |x| \le 5. \end{cases}$$

Ответ: $\{(-3;-5);\ (0;0);\ (3;5)\}$.

2.(факультет государственного управления, 2004, июль, №4) Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине – 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

Ответ: 2445 долларов.

3.(социологический ф-т, 2006, №4) Накануне экзамена Лиза и ее товарищ искали на Воробьевых горах четырехлистный клевер, приносящий, по народной примете, удачу. В первый день товарищ нашел четырехлистников на 20% больше, чем Лиза. Во второй день, наоборот, товарищ нашел четырехлистников на 30% меньше, чем Лиза в этот день. Всего за два дня Лиза нашла четырехлистников на 10% больше, чем ее товарищ. Какое минимальное количество четырехлистников могли найти студенты при данных условиях?

Ответ: 525.

4.(филологический ф-т, 1969, №5) Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что

$$36k_1 - 25k_2 = 1.$$

Ответ: например, $k_1 = 16$, $k_2 = 23$.

5.(ВМК, устный, 1999)Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

Ответ: 7.

6.(филологический ф-т, 1970, №7) Сколькими способами сумму в 4 руб 96 коп можно составить из монет по 2 и 15 коп?

Ответ: 17.

7.(ф-т психологии, 1967, №4) Найти сумму чисел, являющихся одновременно членами двух арифметических прогрессий 5, 9, $13, \ldots$ и 3, 9, $15, \ldots$, если известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

Ответ: 27135.

8.(факультет наук о материалах, 2001, апрель, №4) Учительница принесла в класс счетные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лищняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счетных палочек?

Ответ: 189.

9.(ф-т психологии, 1994, №5) Партия деталей была изготовлена цехом в течение нескольких дней, причём каждый день изготовлялось одно и то же число деталей. Когда треть продукции одного дня была упакована в ящики, то в каждом ящике оказалось столько деталей, сколько ящиков понадобилось для упаковки, причём число ящиков было равно числу дней работы цеха. После отсылки половины всех деталей заказчикам выяснилось, что куб числа заказчиков был равен числу деталей, высланных каждому из заказчиков. Какое минимальное число деталей мог при этих условиях изготовить цех?

Ответ: 41472.

10.(ВМК, устный, 1998) Найти минимальные натуральные m и n такие, что $2n^2 = 3m^3$.

Ответ: $m = 6, n = 18$.

11.(ВМК, устный, 2004)Пусть x, y – целые числа. Найти наименьшее положительное число N, если $N = 6x + 3y$.

Ответ: $N_{\min} = 3$.

12.(ВМК, 2007, устный) На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $\frac{89}{3m+7n}$ является натуральным числом?

Ответ: 3.

13.(ВМК, 2007, устный) Найти наименьшее натуральное число x такое, что остаток от деления x на 8 на 5 больше остатка от деления x на 5 и в два раза больше остатка от деления x на 7.

Ответ: 206.

14.(эконом., 2008, №5)Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остаётся 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли ещё 3 пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остаётся 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет.

Ответ: 333.

15.(экономический ф-т, отд. менеджмента, 2004, июль, №5) Баржа грузоподъемности 96 тонн перевозит контейнеры типов А и Б при условии полной загрузки. Количество загруженных на баржу контейнеров типа Б не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляют 3 тонны и 5 тысяч рублей, контейнера типа Б – 4 тонны и 2 тысячи рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Ответ: 90 тыс. руб.

16.(экономический ф-т, отд. кибернетики, 1975, №4) Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду – 14 кг, льву – 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда – 160, у каждой лисы – 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Ответ: 3 лисы, 6 леопардов, 1 лев.

17.(Черноморский филиал МГУ, 1999, №7) Детский сад хочет приобрести наборы цветных карандашей трех видов на сумму 111 рублей, при этом должны быть куплены наборы всех трех видов и истрачена вся сумма. Набор из 2 карандашей стоит 2 рубля, набор из 16 карандашей – 14 рублей, набор из 23 карандашей – 21 рубль. Сколько наборов каждого вида следует купить, чтобы общее количество купленных карандашей было наибольшим при заданных условиях?

Ответ: 3 набора за 2 рубля, 6 наборов за 14 рублей, 1 набор за 21 рубль.

18.(экономический ф-т, отд. кибернетики, 1968, №3) Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 руб., стоимость пересылки одного ящика второго типа 10 руб., стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 руб. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.

Ответ: 25 ящиков второго типа и 4 ящика третьего типа.