О дзета-функциях и семействах зигелевых модулярных форм

А. А. ПАНЧИШКИН
Гренобльский университет I им. Жозефа Фурье, Франция
e-mail: Alexei.Panchishkine@ujf-grenoble.fr

УДК 511.38

Ключевые слова: модулярные формы, L-функции, p-адические конструкции.

Аннотация

Пусть p — простое число и $\Gamma = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ — зигелева модулярная группа рода g. Изучаются p-адические семейства и L-функции зигелевых модулярных форм. В частности, L-функции зигелевых модулярных форм описаны в терминах мотивных L-функций, связанных с группой Sp_g, приведены их аналитические свойства. В связи с p-адическими конструкциями обсуждаются критические значения спинорных L-функций. Установлена лемма Ранкина высшего рода. Сформулирована общая гипотеза о подъёме модулярных форм из произведения $\mathrm{GSp}_{2m} \times \mathrm{GSp}_{2m}$ в модулярные формы для группы GSp_{4m} (рода $g = 4m$). Даются конструкции p-адических семейств зигелевых модулярных форм, использующие построения Икеды—Миyваки.

Abstract

A. A. Panchishkin, On zeta functions and families of Siegel modular forms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 139—160.

Let p be a prime, and let $\Gamma = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ be the Siegel modular group of genus g. The paper is concerned with p-adic families of zeta functions and L-functions of Siegel modular forms, the latter are described in terms of motivic L-functions attached to Sp_g; their analytic properties are given. Critical values for the spinor L-functions are discussed in relation to p-adic constructions. Rankin's lemma of higher genus is established. A general conjecture on a lifting of modular forms from $\mathrm{GSp}_{2m} \times \mathrm{GSp}_{2m}$ to GSp_{4m} (of genus $g = 4m$) is formulated. Constructions of p-adic families of Siegel modular forms are given using Ikeda–Miyawaki constructions.

1. Введение

Данная статья основана на материалах нескольких последних докладов, в частности доклада в Московском университете 2 февраля 2007 года на конференции «Диофантовы и аналитические проблемы в теории чисел» памяти А. О. Гельфонда.

Пусть $\Gamma = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{Z})$ — зигелева модулярная группа рода g. Пусть p — простое число,

$$\mathbf{T}(p) = \mathbf{T}\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{g},\underbrace{p,\ldots,p}_{g}\Big) -$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 139—160.

p-оператор Гекке и

$$[\mathbf{p}]_g = p\mathbf{I}_{2g} = \mathbf{T}\Big(\underbrace{p, \ldots, p}_{2g}\Big) \text{ —}$$

скалярный оператор Гекке относительно группы Sp_g.

В статье обсуждаются следующие темы:

1) L-функции зигелевых модулярных форм;
2) мотивные L-функции для группы Sp_g и их аналитические свойства;
3) критические значения спинорных L-функций и конструкции их p-адических аналогов;
4) лемма Ранкина высшего рода;
5) общая гипотеза о подъёме модулярных форм из произведения

$$\mathrm{GSp}_{2m} \times \mathrm{GSp}_{2m}$$

в модулярные формы для группы GSp_{4m} (рода $g = 4m$);
6) конструкции p-адических семейств зигелевых модулярных форм;
7) конструкции Икеды—Мияваки и их p-адические версии.

2. L-функции зигелевых модулярных форм

Разложение Фурье зигелевых модулярных форм

Пусть

$$f = \sum_{\mathcal{T} \in B_n} a(\mathcal{T}) q^{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_k^n \text{ —}$$

зигелева модулярная форма веса k и рода n на зигелевой верхней полуплоскости

$$\mathbb{H}_n = \{z \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Напомним некоторые основные факты о формальном *разложении Фурье* формы f. Мы будем использовать обозначение

$$q^{\mathcal{T}} = \exp(2\pi i \,\mathrm{tr}(\mathcal{T} z)) = \prod_{i=1}^{n} q_{ii}^{\mathcal{T}_{ii}} \prod_{i<j} q_{ij}^{2\mathcal{T}_{ij}} \in \mathbb{C}[\![q_{11}, \ldots, q_{nn}]\!][q_{ij}, q_{ij}^{-1}]_{i,j=1,\ldots,m},$$

где $q_{ij} = \exp\big(2\pi(\sqrt{-1}z_{i,j})\big)$ и $\mathcal{T}$ принадлежит полугруппе

$$B_n = \{\mathcal{T} = {}^t\mathcal{T} \geqslant 0 \mid \mathcal{T} \text{ полуцелая}\}.$$

Операторы Гекке и сферическое отображения

Напомним, что локальная алгебра Гекке над $\mathbb{Z}$, обозначаемая

$$\mathcal{L}_{n,\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[\mathbf{T}(p), \mathbf{T}_1(p^2), \ldots, \mathbf{T}_n(p^2)],$$

порождается следующими $n+1$ операторами Гекке:

$$\mathbf{T}(p) := T\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{n},\underbrace{p,\ldots,p}_{n}\Big),$$

$$\mathbf{T}_i(p^2) := T\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-i},\underbrace{p,\ldots,p}_{i},\underbrace{p^2,\ldots,p^2}_{n-i},\underbrace{p,\ldots,p}_{i}\Big), \quad i=1,\ldots,n,$$

$\mathbf{T}_n(p^2) = [\mathbf{p}] = [\mathbf{p}]_n = T\Big(\underbrace{p,\ldots,p}_{2n}\Big) = p\,\mathbf{I}_{2n}$, а сферическое отображение

$$\Omega\colon \mathcal{L}_{n,\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\mathbf{T}(p),\mathbf{T}_1(p^2),\ldots,\mathbf{T}_n(p^2)] \to \mathbb{Q}[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

является некоторым инъективным гомоморфизмом колец.

Параметры Сатаке собственных функций операторов Гекке

Рассмотрим некоторую собственную функцию $f \in \mathcal{M}_k^n$ всех *операторов Гекке*, $f \mapsto f|T$, $T \in \mathcal{L}_{n,p}$ (для всех простых чисел p). Тогда $f|T = \lambda_f(T)f$. Все числа $\lambda_f(T) \in \mathbb{C}$ задают некоторый гомоморфизм $\lambda_f\colon \mathcal{L}_{n,p} \to \mathbb{C}$, определяемый выбором $n+1$ комплексных чисел

$$(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$$

(параметров Сатаке формы f), таких что

$$\lambda_f(T) = \Omega(T)(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

В частности, имеем

$$\lambda_f([\mathbf{p}]) = \alpha_0^2\alpha_1\cdots\alpha_n = p^{kn-n(n+1)/2},$$

$$\lambda_f(\mathbf{T}(p)) = \Omega(\mathbf{T}(p)) = \alpha_0(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n) = \sum_{j=0}^{n}\alpha_0 s_j(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

L-функции, функциональное уравнение и мотивы для группы Sp_n (см. [31, 48])

Определим многочлены

$$Q_{f,p}(X) = (1-\alpha_0X)\prod_{r=1}^{n}\prod_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n}(1-\alpha_0\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_r}X),$$

$$R_{f,p}(X) = (1-X)\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i^{-1}X)(1-\alpha_iX) \in \mathbb{Q}[\alpha_0^{\pm1},\ldots,\alpha_n^{\pm1}][X].$$

Тогда спинорная L-функция $L(\mathrm{Sp}(f),s)$ и стандартная L-функция $L(\mathrm{St}(f),s,\chi)$ формы f для $s\in\mathbb{C}$ и для всех характеров Дирихле χ определяются как следующие эйлеровы произведения:

$$L(\mathrm{Sp}(f),s,\chi)=\prod_p Q_{f,p}(\chi(p)p^{-s})^{-1},$$
$$L(\mathrm{St}(f),s,\chi)=\prod_p R_{f,p}(\chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

3. Мотивные L-функции для группы Sp_n и их аналитические свойства

Связь с L-функциями и мотивами для группы Sp_n

Следуя [31, 48], напомним, что эти функции предположительно являются мотивными для всех $k>n$:

$$L(\mathrm{Sp}(f),s,\chi)=L\big(M\big(\mathrm{Sp}(f)\big)(\chi),s\big),\quad L(\mathrm{St}(f),s)=L\big(M\big(\mathrm{St}(f)\big)(\chi),s\big),$$

мотивы $M\big(\mathrm{Sp}(f)\big)$ и $M\big(\mathrm{St}(f)\big)$ являются *чистыми* если f — подлинная параболическая форма (т. е. не индуцированная как подъём с меньшего рода). При этом

- мотив $M\big(\mathrm{Sp}(f)\big)$ определён над $\mathbb{Q}$, имеет коэффициенты в $\mathbb{Q}\big(\lambda_f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, ранг 2^n, вес $w=kn-n(n+1)/2$ и тип Ходжа $\bigoplus_{p,q}H^{p,q}$, где

$$\begin{aligned}&p=(k-i_1)+(k-i_2)+\ldots+(k-i_r),\\&q=(k-j_1)+(k-j_2)+\ldots+(k-i_s),\quad r+s=n,\\&1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_r\leqslant n,\quad 1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_s\leqslant n,\\&\{i_1,\ldots,i_r\}\cup\{j_1,\ldots,j_s\}=\{1,2,\ldots,n\};\end{aligned}\tag{1}$$

- мотив $M\big(\mathrm{St}(f)\big)$ определён над $\mathbb{Q}$, имеет коэффициенты в $\mathbb{Q}\big(\lambda_f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, ранг $2n+1$, вес $w=0$ и тип Ходжа

$$H^{0,0}\bigoplus_{i=1}^{n}(H^{-k+i,k-i}\oplus H^{k-i,-k+i}).$$

Функциональное уравнение и критические значения

Согласно общей гипотезе Делиня (см. [17]) о мотивных L-функциях такие L-функции удовлетворяют функциональному уравнению, определённому структурой Ходжа мотива:

$$\Lambda\left(\mathrm{Sp}(f),kn-\frac{n(n+1)}{2}+1-s\right)=\varepsilon(f)\Lambda(\mathrm{Sp}(f),s),$$

где

$$\Lambda(\mathrm{Sp}(f),s)=\Gamma_{n,k}(s)L(\mathrm{Sp}(f),s),\quad \varepsilon(f)=(-1)^{k2^{n-2}},$$
$$\Gamma_{1,k}(s)=\Gamma_{\mathbb{C}}(s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s),\quad \Gamma_{2,k}(s)=\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+2),$$
$$\Gamma_{n,k}(s)=\prod_{p<q}\Gamma_{\mathbb{C}}(s-p)\Gamma_{\mathbb{R}}^{a_+}\left(s-\frac{w}{2}\right)\Gamma_{\mathbb{R}}\left(s+1-\frac{w}{2}\right)^{a_-}$$

для некоторых неотрицательных чисел a_+ и a_-, $a_+ + a_- = w/2$, и $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$. В частности, для $n=3$ и $k\geqslant 5$ это гипотетическое функциональное уравнение имеет вид

$$\Lambda(\mathrm{Sp}(f),s)=\Lambda(\mathrm{Sp}(f),3k-5-s),$$

где

$$\Lambda(\mathrm{Sp}(f),s)=\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+3)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+1)L(\mathrm{Sp}(f),s).$$

Для $k\geqslant 5$ критические значения в смысле Делиня [17] следующие:

$$s=k,\dots,2k-5.$$

Аналитические свойства функций $L(\mathrm{Sp}(f),s)$ (ср. с [45])

Для изучения аналитических свойств функций можно использовать связь между собственными значениями $\lambda_f(T)$ и коэффициентами Фурье $a_f(\mathcal{T})$, где $T\in\mathcal{D}(\Gamma,S)$ пробегает операторы Гекке, а $\mathcal{T}\in B_n$ пробегает полуцелые неотрицательные симметрические матрицы. А. Н. Андриановым было доказано (см. [1]), что

$$D(X)=\sum_{\delta=0}^{\infty}\mathbf{T}(p^\delta)X^\delta=\frac{E(X)}{F(X)},$$

где

$$E(X)=1-p^2(\mathbf{T}_2(p^2)+(p^2-p+1)(p^2+p+1)[\mathbf{p}]_3)X^2+(p+1)p^4\mathbf{T}(p)[\mathbf{p}]_3X^3 - \\ -p^7[\mathbf{p}]_3(\mathbf{T}_2(p^2)+(p^2-p+1)(p^2+p+1)[\mathbf{p}]_3)X^4+p^{15}[\mathbf{p}]_3^3X^6\in\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}[X].$$

Вычисление формального ряда Дирихле

Зная $E(X)$, можно вычислить следующий формальный ряд Дирихле:

$$D_E(s)=\sum_{h=1}^{\infty}\mathbf{T}_E(h)h^{-s}=\prod_p D_{E,p}(p^{-s}),$$

где

$$D_{E,p}(X)=\sum_{\delta=0}^{\infty}\mathbf{T}_E(p^\delta)X^\delta=\frac{D_p(X)}{E(X)}=\frac{1}{F(X)}\in\mathcal{D}(\Gamma,S)[\![X]\!].$$

Основное равенство

Для всех $\mathcal{T}$ получаем следующее равенство:

$$a_f(\mathcal{T})L(\mathrm{Sp}(f),s)=\sum_{h=1}^{\infty}a_f(\mathcal{T},E,h)h^{-s},\tag{2}$$

где

$$f|\mathbf{T}_E(h)=\sum_{\mathcal{T}\in B_n}a_f(\mathcal{T},E,h)q^{\mathcal{T}}.$$

Действительно,

$$f|\mathbf{T}_E(h)=\lambda_f\big(\mathbf{T}_E(h)\big)f,\quad L(\mathrm{Sp}(f),s)=\sum_{h=1}^{\infty}\lambda_f\big(\mathbf{T}_E(h)\big)h^{-s},$$

поэтому

$$\sum_{h=1}^{\infty}f|\mathbf{T}_E(h)h^{-s}=L(\mathrm{Sp}(f),s)\cdot f=\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\mathcal{T}\in B_n}a_f(\mathcal{T},E,h)h^{-s}q^{\mathcal{T}},$$

и остаётся сравнить коэффициенты Фурье.

Тождество типа (2) является необходимым шагом в задаче аналитического продолжения L-функций $L(\mathrm{Sp}(f),s)$, а также при изучении их арифметических приложений, поскольку даёт метод вычисления специальных значений $L(\mathrm{Sp}(f),s)$ через коэффициенты Фурье.

Напомним,что в случае стандартных L-функций $L(\mathrm{St}(f),s)$ используются метод Ранкина—Сельберга и метод удвоения (см. [10, 16, 31]).

4. Критические значения, периоды и p-адические L-функции для группы Sp_3

Общая гипотеза Коутса и Перрен-Риу (см. [11, 12, 31]) предсказывает при $n=3$ и $k>5$ существование p-адических L-аналогов для комплексных мотивных L-функций $L(\mathrm{Sp}(f),s)$.

Зафиксируем вложение $i_p\colon\bar{\mathbb{Q}}\to\mathbb{C}_p=\hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$, и пусть $\alpha_0(p)$ — обратный корень (т. е. число, обратное к корню) многочлена $Q_{f,p}$, имеющий наименьшее p-адическое нормирование.

«Условие Панчишкина» (см. [20, 31, 32]) для существования ограниченных p-адических L-функций в данном случае принимает вид $\mathrm{ord}_p\big(\alpha_0(p)\big)=0$. Напомним, что это условие состоит в следующем: для чистого мотива M ранга d, ордината точки p-полигона Ньютона с абсциссой $d/2$ равна ординате точки полигона Ходжа с абсциссой $d/2$. При невыполнении этого условия предположительно существуют p-адические L-функции логарифмического роста $o\big(\log^h(\cdot)\big)$, где $h=\big[2\,\mathrm{ord}_p\big(\alpha_0(p)\big)\big]+1$, $2\,\mathrm{ord}_p\big(\alpha_0(p)\big)$ равно разности ординаты точки p-полигона Ньютона в $d/2$ и ординаты точки полигона Ходжа в $d/2$. В случае унитарных групп условие существования ограниченных p-адических L-функций обсуждалось в работе [20].

5. Лемма Ранкина высшего рода

Наша следующая цель состоит в вычислении производящего ряда

$$D_p^{(1,1)}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta)\, X^\delta \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[\![X]\!]$$

в терминах образующих алгебры Гекке $\mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}$:

$$\begin{gathered} \mathbf{T}(p) \otimes 1, \quad \mathbf{T}_1(p^2) \otimes 1, \quad [\mathbf{p}] \otimes 1, \\ 1 \otimes \mathbf{T}(p), \quad 1 \otimes \mathbf{T}_1(p^2), \quad 1 \otimes [\mathbf{p}]. \end{gathered}$$

Теорема [38]. *Для рода $n = 2$ имеет место следующее явное представление в виде рациональной дроби*:

$$D_p^{(1,1)}(X) = \sum_{\delta=0}^{\infty} T(p^\delta) \otimes T(p^\delta)\, X^\delta = (1 - p^6[\mathbf{p}] \otimes [\mathbf{p}]X^2)\frac{R(X)}{S(X)},$$

где

$$\begin{aligned} &R(X) = 1 + r_1X + \ldots + r_{12}X^{12}, \quad r_1 = r_{11} = 0, \\ &S(X) = 1 + s_1X + \ldots + s_{16}X^{16}, \\ &R(X), S(X) \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[X], \end{aligned}$$

явный вид коэффициентов r_i и s_i приведён в приложении к статье [38].

Здесь мы приведём лишь полигоны Ньютона многочленов $R(X)$ и $S(X)$ относительно степеней p и X (см. рис. 1). Из наших вычислений следует, что все наклоны этих полигонов Ньютона — целые числа.

Мы надеемся, что эти полигоны помогут найти геометрические объекты, связанные с многочленами $R(X)$ и $S(X)$, подобно тому, как это сделано в [19].

Половина коэффициентов, именно $s_9, \ldots, s_{16}$, может быть найдена через следующее простое функциональное уравнение:

$$s_{16-i} = (p^6\mathbf{T}_2(p^2) \otimes \mathbf{T}_2(p^2))^{8-i} s_i \quad (i = 0, \ldots, 8).$$

Доказательство. Напомним, что

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} \Omega^{(n=2)}\big(T(p^\delta)\big)X^\delta = \frac{1 - \frac{x_0^2x_1x_2}{p}X^2}{(1 - x_0X)(1 - x_0x_1X)(1 - x_0x_2X)(1 - x_0x_1x_2X)}.$$

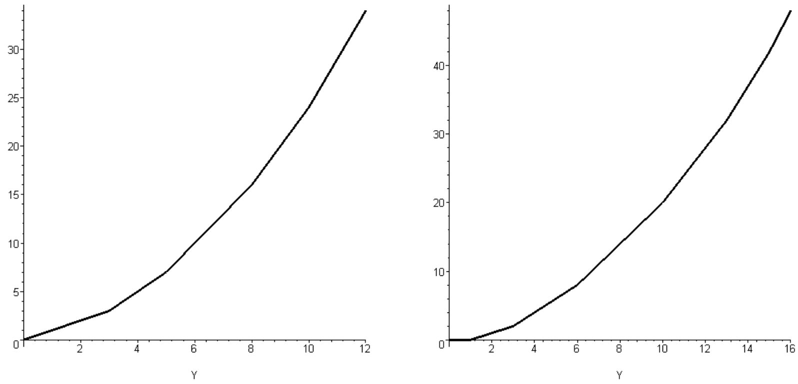

Рис. 1. Полигоны Ньютона многочленов $R(X)$ и $S(X)$ относительно степеней p и X с высотами 34 и 48 соответственно

Исходя из этого ряда, можно получить формулу для $\Omega\big(T(p^\delta)\big)$, рассматривая геометрические прогрессии

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}(x_0X)^{\nu_1}=\frac{1}{1-x_0X},\qquad \sum_{\nu_2=0}^{\infty}(x_0x_1X)^{\nu_2}=\frac{1}{1-x_0x_1X},$$
$$\sum_{\nu_3=0}^{\infty}(x_0x_2X)^{\nu_3}=\frac{1}{1-x_0x_2X},\qquad \sum_{\nu_4=0}^{\infty}(x_0x_1x_2X)^{\nu_4}=\frac{1}{1-x_0x_1x_2X}:$$

$$\begin{aligned}
\Omega_x\big(T(p^\delta)\big) &= p^{-1}x_0^\delta\big(px_1^{(3+\delta)}x_2-px_1x_2^{(3+\delta)}-px_1^{(2+\delta)}+px_2^{(2+\delta)}-\\
&-px_1^{(3+\delta)}x_2^{(2+\delta)}+px_1^{(2+\delta)}x_2^{(3+\delta)}+px_1-px_2-\\
&-x_1^{(2+\delta)}x_2^2+x_1^{(1+\delta)}x_2+x_1^{(2+\delta)}x_2^{(1+\delta)}-x_1^{(1+\delta)}x_2^{(2+\delta)}+x_1^2x_2^{(2+\delta)}-\\
&-x_1x_2^{(1+\delta)}-x_1^2x_2+x_1x_2^2\big)/\big((1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(x_1-x_2)\big)=\\
&=-p^{-1}x_0^\delta\big((1-x_1x_2)(px_1-x_2)x_1^{(\delta+1)}+(1-x_1x_2)(x_1-px_2)x_2^{(\delta+1)}-\\
&-(1-px_1x_2)(x_1-x_2)(x_1x_2)^{(\delta+1)}-\\
&-(p-x_1x_2)(x_1-x_2)\big)/\big((1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(x_1-x_2)\big).
\end{aligned}$$

Тензорное произведение локальных алгебр Гекке

Используя вторую группу переменных y_0, y_1, y_2 и Ω_y, мы получаем тензорное произведение локальных алгебр Гекке

$$\begin{aligned}
&\Omega_x^{(n)}\otimes\Omega_y^{(n)}\colon \mathcal{L}_{n,\mathbb{Q}}\otimes\mathcal{L}_{n,\mathbb{Q}}\to\mathbb{Q}[x_0,x_1,\dots,x_n;y_0,y_1,\dots,y_n],\\
&\Omega_y^{(2)}\big(T(p^\delta)\big):=\Omega_x^{(2)}\big(T(p^\delta)\big)\big|_{x=y}.
\end{aligned}$$

Произведение двух выражений $\Omega_x^{(2)}\big(T(p^\delta)\big)$ и $\Omega_y^{(2)}\big(T(p^\delta)\big)$ вычисляется непосредственно:

$$\Omega_x^{(2)}\big(T(p^\delta)\big)\cdot\Omega_y^{(2)}\big(T(p^\delta)\big)=p^{-2}x_0^\delta y_0^\delta\big(px_1^{(3+\delta)}x_2-px_1^{(2+\delta)}-px_1^{(3+\delta)}x_2^{(2+\delta)}+$$
$$+px_1^{(2+\delta)}x_2^{(3+\delta)}-px_1x_2^{(3+\delta)}+px_2^{(2+\delta)}+px_1-px_2-x_1^{(2+\delta)}x_2^2+x_1^{(1+\delta)}x_2+$$
$$+x_1^{(2+\delta)}x_2^{(1+\delta)}-x_1^{(1+\delta)}x_2^{(2+\delta)}+x_1^2x_2^{(2+\delta)}-x_1x_2^{(1+\delta)}-x_1^2x_2+x_1x_2^2\big)\times$$
$$\times\big(py_1^{(3+\delta)}y_2-py_1^{(2+\delta)}-py_1^{(3+\delta)}y_2^{(2+\delta)}+py_1^{(2+\delta)}y_2^{(3+\delta)}-py_1y_2^{(3+\delta)}$$
$$+py_2^{(2+\delta)}+py_1-py_2-y_1^{(2+\delta)}y_2^2+y_1^{(1+\delta)}y_2+y_1^{(2+\delta)}y_2^{(1+\delta)}-y_1^{(1+\delta)}y_2^{(2+\delta)}+$$
$$+y_1^2y_2^{(2+\delta)}-y_1y_2^{(1+\delta)}-y_1^2y_2+y_1y_2^2\big)/\big((1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(x_1-x_2)\times$$
$$\times(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(y_1-y_2)\big).$$

Суммирование полученных выражений даёт следующий результат:

$$\big(\Omega^{(2)}\otimes\Omega^{(2)}\big)\big(D_p^{(1,1)}(X)\big)=\sum_{\delta=0}^{\infty}\Omega_x^{(2)}\big(T(p^\delta)\big)\cdot\Omega_y^{(2)}\big(T(p^\delta)\big)X^\delta=$$
$$-\frac{(px_1-x_2)(1-py_1y_2)x_1y_1y_2}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0x_1y_0y_1y_2X)}+$$
$$+\frac{x_2y_1(x_1-px_2)(py_1-y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)(y_1-y_2)(1-x_0x_2y_0y_1X)}+$$
$$+\frac{x_2y_2(x_1-px_2)(y_1-py_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_1)(1-y_1)(1-y_2)(y1-y_2)(1-x_0y_0x_2y_2X)}-$$
$$-\frac{x_2y_1y_2(x_1-px_2)(1-py_1y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0x_2y_0y_1y_2X)}-$$
$$-\frac{x_1(px_1-x_2)(p-y_1y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0x_1y_0X)}-$$
$$-\frac{x_1x_2y_1(1-px_1x_2)(py_1-y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(y_1-y_2)(1-x_0x_1x_2y_0y_1X)}-$$
$$-\frac{x_1x_2y_2(1-px_1x_2)(y_1-py_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(y_1-y_2)(1-x_0x_1x_2y_0y_2X)}+$$
$$+\frac{y_1y_2(p-x_1x_2)(1-py_1y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0y_0y_1y_2X)}+$$
$$+\frac{x_1x_2(1-px_1x_2)(p-y_1y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0x_1x_2y_0X)}-$$
$$-\frac{x_1y_1(px_1-x_2)(py_1-y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)(y_1-y_2)(1-x_0x_1y_0y_1X)}+$$

$$+\frac{x_1y_2(px_1-x_2)(y_1-py_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)(y_1-y_2)(1-x_0x_1y_0y_2X)}-$$
$$-\frac{x_2(x_1-px_2)(p-y_1y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(x_1-x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0x_2y_0X)}+$$
$$+\frac{x_1x_2y_1y_2(1-px_1x_2)(1-py_1y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0x_1x_2y_0y_1y_2X)}+$$
$$+\frac{(p-x_1x_2)(p-y_1y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(1-y_1y_2)(1-x_0y_0X)}-$$
$$-\frac{y_1(p-x_1x_2)(py_1-y_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(y_1-y_2)(1-x_0y_0y_1X)}-$$
$$-\frac{y_2(p-x_1x_2)(y_1-py_2)}{p^2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_1x_2)(1-y_1)(1-y_2)(y_1-y_2)(1-x_0y_0y_2X)}.$$

Свойства образа $\boldsymbol{\big(\Omega^{(2)}\otimes\Omega^{(2)}\big)\big(D_p^{(1,1)}(X)\big)}$

Мы проверяем явным вычислением, что многочлены, не зависящие от X, в знаменателе образа $\big(\Omega^{(2)}\otimes\Omega^{(2)}\big)\big(D_p^{(1,1)}(X)\big)$ сокращаются в кольце

$$\mathbb{Q}[x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2][\![X]\!]$$

и общий знаменатель преобразуется к виду

$$\begin{aligned}&(1-x_0y_0X)(1-x_0y_0x_1X)(1-x_0y_0y_1X)(1-x_0y_0x_2X)(1-x_0y_0y_2X)\times\\ &\quad\times(1-x_0y_0x_1y_1X)(1-x_0y_0x_1x_2X)(1-x_0y_0x_1y_2X)(1-x_0y_0y_1x_2X)\times\\ &\quad\times(1-x_0y_0y_1y_2X)(1-x_0y_0x_2y_2X)(1-x_0y_0x_1y_1x_2X)(1-x_0y_0x_1y_1y_2X)\times\\ &\quad\times(1-x_0y_0x_1x_2y_2X)(1-x_0y_0y_1x_2y_2X)(1-x_0y_0x_1y_1x_2y_2X).\end{aligned}$$

Более того, мы находим, что числитель состоит из множителя

$$(1-x_0^2y_0^2x_1y_1x_2y_2X^2)$$

и многочлена от переменной X степени 12 с коэффициентами в

$$\mathbb{Q}[x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2]$$

(постоянный член равен 1, а главный член равен $p^{-2}x_0^{12}y_0^{12}x_1^6x_2^6y_1^6y_2^6X^{12}$). Мы также находим, что множитель степени 12 не содержит членов степени 1 и 11 по переменной X. Мы получаем, что

$$\big(\Omega^{(2)}\otimes\Omega^{(2)}\big)\big(D_p^{(1,1)}(X)\big)=\frac{(1-x_0^2y_0^2x_1y_1x_2y_2X^2)R_{x,y}(X)}{S_{x,y}(X)},$$

где

$$\begin{aligned}R_{x,y}(X)&=1+r_{2,x,y}X^2+\ldots+r_{10,x,y}X^{10}+r_{12,x,y}X^{12},\\ S_{x,y}(X)&=1+s_{1,x,y}X+\ldots+s_{16,x,y}X^{16}\in\mathbb{Q}[x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2,X].\end{aligned}$$

Выражение через операторы Гекке

Зная коэффициенты многочленов

$$R_{x,y}(X), S_{x,y}(X) \in \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, X]$$

(образов при отображении $\Omega_x \otimes \Omega_y$), можно восстановить их прообразы

$$R(X) = 1 + r_2X^2 + \ldots + r_{10}X^{10} + r_{12}X^{12},$$
$$S(X) = 1 + s_1X + \ldots + s_{16}X^{16} \in \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{L}_{2,\mathbb{Z}}[X].$$

Для этого используются образы генераторов (образующих)

$$\Omega_x\big(\mathbf{T}(p)^{\lambda_0}\mathbf{T}_1(p^2)^{\lambda_1}[\mathbf{p}]^{\lambda_2}\big)\Omega_y\big(\mathbf{T}(p)^{\mu_0}\mathbf{T}_1(p^2)^{\mu_1}[\mathbf{p}]^{\mu_2}\big)$$

и рассматривается система с неопределёнными коэффициентами

$$K_{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\mu_0,\mu_1,\mu_2},$$

выражающая все мономы

$$\Omega_x\big(\mathbf{T}(p)^{\lambda_0}\mathbf{T}_1(p^2)^{\lambda_1}[\mathbf{p}]^{\lambda_2}\big)\Omega_y\big(\mathbf{T}(p)^{\mu_0}\mathbf{T}_1(p^2)^{\mu_1}[\mathbf{p}]^{\mu_2}\big)$$

вплоть до степени 12 для $R_{x,y}(X)$ (и до степени 16 для $S_{x,y}(X)$) от переменной x_0 и от переменной y_0. $\square$

Сравнение со случаем рода $n = 1$

Множитель $1 - x_0^2y_0^2x_1y_1x_2y_2X^2$ степени 2 от переменной X очень похож на случай рода $g = 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta=0}^{\infty}\Omega_x^{(1)}\big(T(p^\delta)\big)\cdot\Omega_y^{(1)}\big(T(p^\delta)\big)X^\delta &= \sum_{\delta=0}^{\infty}\frac{x_0^\delta(1-x_1^{(1+\delta)})}{1-x_1}\cdot\frac{y_0^\delta(1-y_1^{(1+\delta)})}{1-y_1}X^\delta = \\
&= \frac{1}{(1-x_1)(1-y_1)(1-x_0y_0X)} - \frac{y_1}{(1-x_1)(1-y_1)(1-x_0y_0y_1X)} - \\
&- \frac{x_1}{(1-x_1)(1-y_1)(1-x_0y_0x_1X)} + \frac{x_1y_1}{(1-x_1)(1-y_1)(1-x_0y_0x_1y_1X)} = \\
&= \frac{1-x_0^2y_0^2x_1y_1X^2}{(1-x_0y_0X)(1-x_0y_0x_1X)(1-x_0y_0y_1X)(1-x_0y_0x_1y_1X)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta=0}^{\infty}T(p^\delta)\otimes T(p^\delta)X^\delta &= (1-p^2[\mathbf{p}]\otimes[\mathbf{p}]X^2)\times \\
&\times\big(1-\mathbf{T}(p)\otimes\mathbf{T}(p)X + (p\mathbf{T}(p)^2\otimes[\mathbf{p}] + p[\mathbf{p}]\otimes\mathbf{T}(p)^2 - 2p^2[\mathbf{p}]\otimes[\mathbf{p}])X^2 - \\
&- p^2\mathbf{T}(p)[\mathbf{p}]\otimes\mathbf{T}(p)[\mathbf{p}]X^3 + p^4[\mathbf{p}]^2\otimes[\mathbf{p}]^2X^4\big)^{-1}.
\end{aligned}$$

6. Подъём модулярных форм из произведения $\mathrm{GSp}_{2m} \times \mathrm{GSp}_{2m}$ в модулярные формы на GSp_{4m} (рода $g = 4m$)

Мотив произведения Ранкина рода $n = 2$

Пусть f и g — две зигелевы модулярные формы весов k и l, $k > l$, собственные функции операторов Гекке, и пусть $M\bigl(\mathrm{Sp}(f)\bigr)$ и $M\bigl(\mathrm{Sp}(g)\bigr)$ — (гипотетические) спинорные мотивы форм f и g. Тогда $M\bigl(\mathrm{Sp}(f)\bigr)$ — мотив над $\mathbb{Q}$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}\bigl(\lambda_f(n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ ранга 4, веса $w = 2k-3$ и типа Ходжа

$$H^{0,2k-3} \oplus H^{k-2,k-1} \oplus H^{k-1,k-2} \oplus H^{2k-3,0},$$

а $M\bigl(\mathrm{Sp}(g)\bigr)$ — мотив над $\mathbb{Q}$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}\bigl(\lambda_g(n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ ранга 4, веса $w = 2l-3$ и типа Ходжа

$$H^{0,2l-3} \oplus H^{l-2,l-1} \oplus H^{l-1,l-2} \oplus H^{2l-3,0}.$$

Рассмотрим гомоморфизмы алгебр Гекке

$$\lambda_f \colon \mathcal{L}_{n,p} \to \mathbb{C}, \quad \lambda_g \colon \mathcal{L}_{n,p} \to \mathbb{C},$$

заданные параметрами Сатаке $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ форм f, g, и пусть

$$\lambda_f \otimes \lambda_g \colon \mathcal{L}_{n,p} \otimes \mathcal{L}_{n,p} \to \mathbb{C}.$$

Тензорное произведение $M\bigl(\mathrm{Sp}(f)\bigr) \otimes M\bigl(\mathrm{Sp}(g)\bigr)$ является мотивом над $\mathbb{Q}$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}\bigl(\lambda_f(n), \lambda_g(n)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ ранга 16, веса $w = 2k+2l-6$ и типа Ходжа

$$\begin{aligned}
&H^{0,2k+2l-6} \oplus H^{l-2,2k+l-4} \oplus H^{l-1,2k+l-5} \oplus H^{2l-3,2k-3} \oplus \\
&\quad\oplus H^{k-2,k+2l-4} \oplus H^{k+l-4,k+l-2} \oplus H_{+}^{k+l-3,k+l-3} \oplus H^{k+2l-5,k-1} \oplus \\
&\quad\oplus H^{k-1,k+2l-5} \oplus H_{-}^{k+l-3,k+l-3} \oplus H^{k+l-2,k+l-4} \oplus H^{k+2l-4,k-2} \oplus \\
&\quad\oplus H^{2k-3,2l-3} \oplus H^{2k+l-5,l-1} \oplus H^{2k+l-4,l-2} \oplus H^{2k+2l-6,0}.
\end{aligned}$$

Мотивные L-функции: аналитические свойства

Применяя общую гипотезу Делиня [17] о мотивных L-функциях к спинорному мотиву F зигелевой модулярной группы $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ рода $n = 4$ и веса $k > 5$, имеем

$$\Lambda(\mathrm{Sp}(F), s) = \Lambda(\mathrm{Sp}(F), 4k-9-s),$$

где

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathrm{Sp}(F), s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+4)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+3)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+1) \times \\
\times \Gamma_{\mathbb{C}}(s-2k+7)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-2k+6)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-2k+5)L(\mathrm{Sp}(F), s)
\end{aligned}$$

(сравните это функциональное уравнение с данным в [4, с. 115]).

С другой стороны, для $m = 2$ и для двух параболических форм f и g для $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ весов k, l, $k > l+1$, гипотеза Делиня даёт

$$\Lambda(\mathrm{Sp}(f)\otimes\mathrm{Sp}(g), s) = \varepsilon(f,g)\Lambda(\mathrm{Sp}(f)\otimes\mathrm{Sp}(g), 2k+2l-5-s), \quad |\varepsilon(f,g)| = 1,$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathrm{Sp}(f)\otimes\mathrm{Sp}(g), s) &= \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-l+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-l+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+2)\times\\ &\times\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-2l+3)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k-l+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-k-l+3)\\ &\times L(\mathrm{Sp}(f)\otimes\mathrm{Sp}(g), s).\end{aligned}$$

Мы использовали формулу удвоения Гаусса $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$. Заметим, что при этом $a_+ = a_- = 1$ и гипотетический мотив $M\big(\mathrm{Sp}(f)\big)\otimes M\big(\mathrm{Sp}(g)\big)$ не имеет критических значений в случае рода 2.

Голоморфный подъём модулярных форм из произведения $\mathbf{GSp_{2m}}\times\mathbf{GSp_{2m}}$ в модулярные формы для группы $\mathbf{GSp_{4m}}$ (рода $g = 4m$)

Гипотеза (о подъёме $\mathbf{GSp_{2m}}\times\mathbf{GSp_{2m}}$ в $\mathbf{GSp_{4m}}$). Пусть f и g — две зигелевы модулярные формы рода $2m$ и весов $k > 2m$ и $l = k-2m$, собственные функции операторов Гекке. Тогда существует зигелева модулярная форма F рода $4m$ и веса k с параметрами Сатаке

$$\gamma_0 = \alpha_0\beta_0,\ \gamma_1 = \alpha_1,\ \gamma_2 = \alpha_2,\dots,\ \gamma_{2m} = \alpha_{2m},\ \gamma_{2m+1} = \beta_1,\dots,\ \gamma_{4m} = \beta_{2m}$$

для подходящего выбора параметров Сатаке $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{2m}$ и $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{2m}$ форм f и g.

Легко проверяется, что типы Ходжа мотивов $M\big(\mathrm{Sp}(f)\big)\otimes M\big(\mathrm{Sp}(g)\big)$ и $M\big(\mathrm{Sp}(F)\big)$ совпадают (ранга 2^{4m}). Это следует из приведённого описания (1) и из формул типа Кюннета.

Эта гипотеза поддерживается конструкциями типа Икеды—Мияваки [22, 23, 30]. Пусть k — чётное положительное число, $h \in S_{2k}(\Gamma_1)$ — эллиптическая параболическая форма, нормализованная собственная функция операторов Гекке веса $2k$, $F_{2n} \in S_{k+n}(\Gamma_{2n})$ — подъём Икеды формы h рода $2n$ (предполагается, что $k \equiv n \bmod 2$, $n \in \mathbb{N}$). Пусть $f \in S_{k+n+r}(\Gamma_r)$ — произвольная зигелева параболическая форма рода r и веса $k+n+r$, $n, r \geqslant 1$.

Если взять $n = m$, $r = 2m$, $k{:=}k{+}m$, $k{+}n{+}r{:=}k{+}3m$, то имеем следующий пример выполнимости гипотезы о подъёме:

$$(f,g) = \big(f, F_{2m}(h)\big) \mapsto \mathcal{F}_{h,f} \in S_{k+3m}(\Gamma_{4m}),$$
$$(f,g) = (f, F_{2m}) \in S_{k+3m}(\Gamma_{2m})\times S_{k+m}(\Gamma_{2m}).$$

Другим свидетельством в пользу этой гипотезы являются ряды Эйзенштейна—Зигеля. Пусть $f = E_k^{2m}$ и $g = E_{k-2m}^{2m}$ чётного рода $2m$ и весов k и $k-2m$,

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = p^{k-2m},\dots,\ \alpha_{2m} = p^{k-1},$$
$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = p^{k-4m},\dots,\ \beta_{2m} = p^{k-2m-1}.$$

Тогда имеем

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_1 = p^{k-4m}, \ldots,\ \gamma_{2m} = p^{k-1}$$

для параметров Сатаке рядов Эйзенштейна—Зигеля $F = E_k^{4m}$.

Замечание. Если сравнить L-функцию из гипотезы о подъёме (заданную параметрами Сатаке

$$\gamma_0 = \alpha_0\beta_0,\ \gamma_1 = \alpha_1,\ \gamma_2 = \alpha_2, \ldots,\ \gamma_{2m} = \alpha_{2m},\ \gamma_{2m+1} = \beta_1, \ldots,\ \gamma_{4m} = \beta_{2m}$$

для подходящего выбора $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}$ и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2m}$ параметров Сатаке форм f и g), мы увидим, что эта L-функция соответствует тензорному произведению спинорных L-функций, но *отличается* от соответствующей L-функции в подъёме Иосиды (см. [47]), являющейся произведением сдвинутых L-функций Гекке.

В связи с этим подъёмом необходимо упомянуть принцип функториальности Лэнглэндса: знаменатели наших L-рядов отвечают локальным множителям L-функций (связанных с произведениями L-групп). Если рассмотреть гомоморфизмы

$${}^L\mathrm{GSp}_{2m} = \mathrm{GSpin}(4m+1) \to \mathrm{GL}_{2^{2m}}, \quad {}^L\mathrm{GSp}_{4m} = \mathrm{GSpin}(8m+1) \to \mathrm{GL}_{2^{4m}},$$

то мы увидим, что наша гипотеза совместима с гомоморфизмом L-групп

$$\mathrm{GL}_{2^{2m}} \times \mathrm{GL}_{2^{2m}} \to \mathrm{GL}_{2^{4m}}, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \otimes g_2, \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = {}^L\mathrm{GL}_n.$$

Неясно, однако, позволяет ли принцип функториальности Лэнглэндса предсказать, будет ли этот подъём соответствовать голоморфной зигелевой модулярной форме.

7. Конструкции p-адических семейств зигелевых модулярных форм

Конструкции p-адических L-функций и модулярные символы

Наряду с комплексным параметром s, возможно использование p-адических параметров для построения аналогов L-функций и модулярных символов. Мы используем такие параметры, как скручивание с характерами Дирихле, с одной стороны, и параметр веса теории семейств модулярных форм, с другой стороны. Операция скручивания с характерами Дирихле является фундаментальной операцией с формальными степенными рядами, и p-адическая вариация таких характеров даёт пример аналитических семейств модулярных форм. Этот пример позволяет определить, а в некоторых случаях и вычислить, модулярные символы, связанные с автоморфными представлениями π алгебраической группы G над числовым полем, используя скрученные L-функции $L(s, \pi \otimes \chi, r)$ с центральным характером Дирихле χ (характером Гекке конечного порядка).

В ряде случаев мы получили интегральные представления, дающие как комплексно-аналитическое, так и p-адическое аналитическое продолжение L-функций. Мы рассматриваем методы построения таких L-функций и их семейств в случаях $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ (см. [9]), $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_{2m}$ (см. [8]), $G = \mathrm{GSp}_{2m} \times \mathrm{GSp}_{2m}$, используя метод удвоения и его p-адические варианты, которые, предположительно, применимы и для сверхсходящихся семейств автоморфных форм и уже развиты в более простом случае группы $G = \mathrm{GL}_2$ в работах Р. Колемана, Г. Стивенса [13], автора [34, 35] и других.

p-адический подход

Рассмотрим поле Тэйта $\mathbb{C}_p = \hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$ для простого числа p. Зафиксируем вложение $\bar{\mathbb{Q}} \overset{i_p}{\hookrightarrow} \mathbb{C}_p$ и будем рассматривать алгебраические числа как p-адические, используя i_p. Для p-адического семейства

$$k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) q^n \in \bar{\mathbb{Q}}[\![q]\!] \subset \mathbb{C}_p[\![q]\!]$$

коэффициенты Фурье $a_n(k)$ форм f_k, а также один из p-параметров Сатаке $\alpha(k) := \alpha_p^{(1)}(k)$ являются p-адическими аналитическими функциями $k \mapsto a_n(k)$ при $(n,p) = 1$. Традиционный пример p-адического семейства даётся рядами Эйзенштейна:

$$a_n(k) = \sum_{d|n,\ (d,p)=1} d^{k-1}, \quad f_k = E_k, \quad \alpha_p^{(1)}(k) = 1, \quad \alpha_p^{(2)}(k) = p^{k-1}.$$

Существование p-адических семейств положительного наклона $\sigma > 0$ было установлено Р. Колеманом. Напомним, что наклон определяется равенством $\sigma = \mathrm{ord}_p\big(\alpha_p^{(1)}(k)\big)$ (и предполагается постоянным в p-адической окрестности веса k). Простой пример для $p = 7$, $f = \Delta$, $k = 12$, $a_7 = \tau(7) = -7 \cdot 2392$, $\sigma = 1$ был рассмотрен Р. Колеманом в [13].

Рассмотрение p-адических семейств мотивировано гипотезой Дж. Бёрча и П. Суиннертона-Дайера (см. [15]). Для эллиптической параболической формы веса 2 нормализованной собственной функции операторов Гекке $f = f_2$, соответствующей эллиптической кривой E по Уайлсу [46], рассматривается семейство, содержащее f. Можно попытаться приблизиться к $k = 2$, $s = 1$ по вертикальному направлению $k \to 2$ вместо $s \to 1$, что приводит к формуле, связывающей производную по s в точке $s = 1$ p-адической L-функции с производной по k в точке $k = 2$ p-адической аналитической функции $\alpha_p(k)$ (см. [14]): $L'_{p,f}(1) = \mathcal{L}_p(f) L_{p,f}(1)$, $\mathcal{L}_p(f) = -2\frac{d\alpha_p(k)}{dk}\big|_{k=2}$. Для применимости этой формулы необходимо существование нашей p-адической L-функции двух переменных, построенной в [34].

Для построения p-адических L-функций двух переменных (k,s) используется теория p-адического интегрирования. Применяется понятие H-допустимой меры для натурального числа H, определённого по наклону σ, который появляется в этой конструкции. Затем p-адическая L-функция двух переменных строится из H-допустимой меры со значениями в разных кольцах модулярных форм, в частности форм, близких к голоморфным.

Модулярные формы, близкие к голоморфным, и метод канонической проекции

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое поле. Имеются несколько p-адических подходов к изучению специальных значений L-функций, использующих метод канонической проекции (см. [34]). В этом методе специальные значения и модулярные символы рассматриваются как $\mathcal{A}$-линейные формы на пространствах модулярных форм с коэффициентами в $\mathcal{A}$. Модулярные формы, близкие к голоморфным (см. [41]), — это формальные ряды

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a(n;R)q^n \in \mathcal{A}[\![q]\!][R],$$

для которых при $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ при подстановке $z = x + iy \in \mathbb{H}$, $R = (4\pi y)^{-1}$ ряд сходится к $\mathcal{C}^\infty$-модулярной форме над $\mathbb{H}$ данного веса k и характера Дирихле ψ. Коэффициенты $a(n;R)$ — полиномы из $\mathcal{A}[R]$ ограниченной степени.

Семейства тройных произведений

Семейства тройных произведений дают свежий пример p-адических семейств для алгебраических групп высшего ранга. Они изучались З. Бёхерером и А. Панчишкиным в работе [9]. Тройное произведение с характером Дирихле χ определяется как комплексная L-функция (эйлерово произведение степени 8)

$$L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \prod_{p\nmid N} L\big((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, \chi(p)p^{-s}\big),$$

где

$$L\big((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, X\big)^{-1} = \\ = \det\left(1_8 - X \begin{pmatrix} \alpha_{p,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,1}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,2}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,3}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,3}^{(2)} \end{pmatrix}\right).$$

Мы используем нормализованную L-функцию (см. [11, 12, 17])

$$\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \\ = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_3 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_2 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_1 + 1)L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi),$$

где $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$. Гамма-множитель определяет *критические значения* $s = k_1, \ldots, k_2 + k_3 - 2$ функции $\Lambda(s)$, которые вычисляются явно (как в классической формуле $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$).

Функциональное уравнение для $\Lambda(s)$ имеет вид

$$s \mapsto k_1 + k_2 + k_3 - 2 - s.$$

Рассмотрим произведение трёх собственных значений

$$\lambda = \lambda(k_1, k_2, k_3) = \alpha_{p,1}^{(1)}(k_1)\alpha_{p,2}^{(1)}(k_2)\alpha_{p,3}^{(1)}(k_3)$$

с наклоном

$$\sigma = v_p\big(\lambda(k_1, k_2, k_3)\big) = \sigma(k_1, k_2, k_3) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

который предполагается *постоянным* и *положительным* для всех троек (k_1, k_2, k_3) в подходящей p-адической окрестности фиксированной тройки весов (k_1, k_2, k_3).

Формулировка проблемы для тройных произведений

Для трёх данных p-адических аналитических семейств $\mathbf{f}_j$ наклона $\sigma_j \geqslant 0$ требуется построить p-адическую аналитическую L-функцию четырёх переменных, связанную с тройным произведением Гарретта.

Метод канонической проекции позволяет построить интерполяцию специальных значений

$$(s, k_1, k_2, k_2) \mapsto \Lambda(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, s, \chi)$$

в критических точках $s = k_1, \ldots, k_2 + k_3 - 2$ для сбалансированных весов $k_1 \leqslant k_2 + k_3 - 2$; доказывается, что эти значения являются алгебраическими числами после деления на некоторые «периоды». Однако конструкция p-адической L-функции прямо использует модулярные формы вместо вычисления рассматриваемых специальных значений L-функций, причём сравнение специальных значений комплексной и p-адической L-функций проводится лишь *после построения*.

Основной результат для тройных произведений

1. Функция

   $$\mathcal{L}_{\mathbf{f}} \colon (s, k_1, k_2, k_3) \mapsto \frac{\langle \mathbf{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi)\rangle}{\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}_0\rangle}$$

   зависит p-адически аналитически от четырёх переменных

   $$(\chi \cdot y_p^r, k_1, k_2, k_3) \in X \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3.$$

2. Сравнение комплексных и p-адических значений. Для всех (k_1, k_2, k_3) в некоторой p-адической окрестности $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3 \subset X^3$, удовлетворяющих условию $k_1 \leqslant k_2 + k_3 - 2$, значения в $s = k_2 + k_3 - 2 - r$ совпадают с нормализованными критическими значениями

   $$L^*(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, k_2 + k_3 - 2 - r, \chi) \quad (r = 0, \ldots, k_2 + k_3 - k_1 - 2)$$

   для характеров Дирихле $\chi \bmod Np^v$, $v \geqslant 1$.

3. Зависимость от $x \in X$. Пусть $H = [2\,\mathrm{ord}_p(\lambda)] + 1$. Для произвольных фиксированных $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{B}$ и $x = \chi \cdot y_p^r$ линейная форма (представляю-

щая модулярные символы для тройных модулярных форм) $x \mapsto \frac{\langle \mathbf{f}^0, \mathcal{E}(-r,\chi)\rangle}{\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}_0\rangle}$ продолжается до p-адической аналитической функции типа $o\bigl(\log^H(\cdot)\bigr)$ по переменной $x \in X$.

Общая программа построения p-адических семейств и L-функций

Мы планируем распространить данный метод на ряд других ситуаций, действуя согласно следующей программе.

1. Построение модулярных распределений Φ_j со значениями в бесконечномерной башне пространств модулярных форм $\mathcal{M}(\psi)$.
2. Применение оператора канонической проекции типа π_α на конечномерное подпространство $\mathcal{M}^\alpha(\psi)$.
3. Общий критерий допустимости. Семейство распределений $\pi_\alpha(\Phi_j)$ со значениями в $\mathcal{M}^\alpha(\psi)$ даёт h-допустимую меру $\tilde{\Phi}$ со значениями в некотором модуле конечного ранга.
4. Применение некоторой линейной формы ℓ типа модулярного символа даёт распределения $\mu_j = \ell\bigl(\pi_\alpha(\Phi_j)\bigr)$ и некоторую допустимую меру, исходя из сравнений между модулярными формами $\pi_\alpha(\Phi_j)$.
5. Доказательство того, что некоторые интегралы $\mu_j(\chi)$ распределений μ_j совпадают с определёнными специальными значениями L-функций (знания этих интегралов не требуется для определения мер, они уже определены на этапе 4).
6. Доказательство единственности построенных h-допустимых мер: они однозначно определяются заданием многих интегралов по характерам Дирихле (не обязательно по всем).
7. В большинстве случаев доказательство некоторого функционального уравнения для построенной меры μ с использованием единственности из пункта 6 и применением архимедова функционального уравнения для специальных значений L-функций (алгебраических чисел, вычисленных на этапе 5).

Эта стратегия уже применена в ряде случаев.

8. Конструкции Икеды—Мияваки и их p-адические версии

Подъём Икеды

Т. Икеда обобщил в 1999 году (см. [22]) подъём Саито—Курокавы из модулярных форм одной переменной со значениями в зигелевых модулярных формах рода 2: при условии, что $n \equiv k \bmod 2$, существует подъём эллиптической параболической формы, нормализованной собственной функции операторов Гекке $f \in S_{2k}(\Gamma_1)$, до зигелевой параболической формы, собственной функции операторов Гекке $F \in S_{n+k}(\Gamma_{2n})$, такой что стандартная дзета-функция $L(\mathrm{St}(F), s)$ формы F (степени $2n$) даётся дзета-функцией Гекке формы f посредством равенства

$$\zeta(s) \prod_{j=1}^{2n} L(f; s+k+n-j)$$

(В. Дьюк и О. Имамоглу в [18] высказали предположение об этом подъёме).

Заметим, что параметры Сатаке формы F можно выбрать в виде $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2n}$, где

$$\beta_0 = p^{nk-n(n+1)/2}, \quad \beta_i = \tilde{\alpha} p^{i-1/2} \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \beta_{n+i} = \tilde{\alpha}^{-1} p^{i-1/2}$$

и

$$(1 - \tilde{\alpha} p^{k-1/2} X)(1 - \tilde{\alpha}^{-1} p^{k-1/2} X) = 1 - a(p)X + p^{2k-1} X^2$$

(см. [30, лемма 4.1, с. 65]), т. е. $\alpha = \tilde{\alpha} p^{k-1/2}$, $\tilde{\alpha} = \alpha p^{1/2-k}$ в наших прежних обозначениях.

Гипотеза Икеды—Мияваки

Пусть k — чётное положительное число, $f \in S_{2k}(\Gamma_1)$ — эллиптическая параболическая форма, нормализованная собственная функция операторов Гекке веса $2k$, $F_2 \in S_{k+1}(\Gamma_2) = \mathrm{Maass}(f)$ — подъём Маасса формы f и вообще $F_{2n} \in S_{k+n}(\Gamma_{2n})$ — подъём Икеды формы f (предполагается, что $k \equiv n \bmod 2$, $n \in \mathbb{N}$). Пусть $g \in S_{k+n+r}(\Gamma_r)$ — зигелева модулярная форма, нормализованная собственная функция операторов Гекке рода r и веса $k+n+r$, $n, r \geqslant 1$. Т. Икеда доказал в [23] следующий результат, о котором упоминал И. Мияваки в [29]: существует зигелева модулярная форма, нормализованная собственная функция операторов Гекке $\mathcal{F}_{f,g} \in S_{k+n+r}(\Gamma_{2n+r})$, такая что

$$L(s, \mathcal{F}_{f,g}, \mathrm{St}) = L(s, g, \mathrm{St}) \prod_{j=1}^{2n} L(s+k+n-j, f)$$

(при выполнении некоторого условия необращения в нуль).

p-адические версии конструкций Икеды—Мияваки

Теперь рассмотрим p-адическое семейство

$$k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) q^n \in \bar{\mathbb{Q}}[\![q]\!] \subset \mathbb{C}_p[\![q]\!]$$

с коэффициентами Фурье $a_n(k)$ форм f_k и с одним из p-параметров Сатаке $\alpha(k) := \alpha_p^{(1)}(k)$, заданными некоторыми аналитическими p-адическими функциями $k \mapsto a_n(k)$ для всех $(n, p) = 1$. Тогда коэффициенты Фурье модулярных форм $F = F_k$ и $\mathcal{F}_{f,g} = \mathcal{F}_{f_k,g}$ могут быть выражены в явном виде через коэффициенты форм f_k, что даёт новые примеры p-адических семейств зигелевых модулярных форм.

Отметим, что параметры Сатаке формы F имеют вид $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2n}$, где

$$\beta_0 = p^{nk-n(n+1)/2}, \quad \beta_i = \alpha(k)p^{i-k}, \quad \beta_{n+i} = \alpha(k)^{-1}p^{k+i-1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Я искренне благодарю Зигфрида Бёхерера, Стефена Гельбарта, Соломона Фридберга и Вадима Зудилина за ценные наблюдения и обсуждения.

Я особенно благодарен и признателен Юрию Валентиновичу Нестеренко за приглашение на Международную конференцию «Диофантовы и аналитические проблемы в теории чисел» памяти А. О. Гельфонда в Московском университете и за предложение подготовить статью для сборника трудов конференции.

Литература

[1] Андрианов А. Н. Гипотеза Шимуры для зигелевой модулярной группы рода 3 // ДАН СССР. — 1967. — Т. 177, № 4. — С. 755—758.

[2] Андрианов А. Н. Теоремы рациональности для рядов Гекке и дзета-функции групп GL_n и Sp_n над локальными полями // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1969. — Т. 33, № 3. — С. 466—505.

[3] Андрианов А. Н. Сферические функции для GL_n над локальными полями и суммирование рядов Гекке // Мат. сб. — 1970. — Т. 83 (125), № 3 (11). — С. 429—451.

[4] Андрианов А. Н. Эйлеровы произведения, отвечающие модулярным формам Зигеля рода 2 // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, № 3 (177). — С. 43—110.

[5] Андрианов А. Н., Журавлёв В. Г. Модулярные формы и операторы Гекке. — М.: Наука, 1990.

[6] Евдокимов С. А. Ряды Дирихле, дзета-функции Андрианова в теории эйлеровых модулярных форм рода 3 // ДАН СССР. — 1984. — Т. 277, № 1. — С. 25—29.

[7] Andrianov A. N. Quadratic Forms and Hecke Operators. — Berlin: Springer, 1987.

[8] Boecherer S., Heim B. L-functions for $\mathrm{GSp}_2 \times \mathrm{Gl}_2$ of mixed weights // Math. Z. — 2000. — Vol. 235. — P. 11—51.

[9] Böcherer S., Panchishkin A. A. Admissible p-adic measures attached to triple products of elliptic cusp forms // Doc. Math. — 2006. — Extra Volume Coates. — P. 77—132.

[10] Böcherer S., Schmidt C.-G. p-adic measures attached to Siegel modular forms // Ann. Inst. Fourier. — 2000. — Vol. 50, no. 5. — P. 1375—1443.

[11] Coates J. On p-adic L-functions // Astérisque. — 1989. — Sém. Bourbaki 1987–1988. Exp. 701. — P. 177—178.

[12] Coates J., Perrin-Riou B. On p-adic L-functions attached to motives over $\mathbb{Q}$ // Algebraic Number Theory. Conference in honor of Iwasawa. — Boston: Academic Press, 1989. — (Adv. Stud. Pure Math.; Vol. 17). — P. 23—54.

[13] Coleman R. p-adic Banach spaces and families of modular forms // Invent. Math. — 1997. — Vol. 127, no. 3. — P. 417—479.

[14] Coleman R., Stevens G., Teitelbaum J. Numerical experiments on families of p-adic modular forms // Computational Perspectives in Number Theory / D. A. Buell, J. T. Teitelbaum, eds. — Amer. Math. Soc., 1998. — P. 143—158.

[15] Colmez P. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique // Astérisque. — 2004. — Vol. 294. — Sém. Bourbaki 2002–2003. Exp. 919. — P. 251—319.

[16] Courtieu M., Panchishkin A. A. Non-Archimedean L-Functions and Arithmetical Siegel Modular Forms. — Berlin: Springer, 2004. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1471).

[17] Deligne P. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales // Automorphic Forms, Representations and L-Functions (Proc. Symp. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Oregon, 1977). Pt. 2. — Providence: Amer. Math. Soc., 1979. — (Proc. Symp. Pure Math.; Vol. 33). — P. 313—346.

[18] Duke W., Imamoḡlu Ö. Siegel modular forms of small weight // Math. Ann. — 1998. — Vol. 310. — P. 73—82.

[19] Faber C., van der Geer G. Sur la cohomologie des systèmes locaux sur les espaces de modules des courbes de genre 2 et des surfaces abéliennes. I, II // C. R. Acad. Sci. Paris. — 2004. — Vol. 338, no. 5. — P. 381—384; Vol. 338, no. 6. — P. 467—470.

[20] Harris M., Li J.-Sh., Skinner Ch. M. p-adic L-functions for unitary Shimura varieties: Preprint. — 2006.

[21] Hecke E. Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwickelung. I, II // Math. Ann. — 1937. — Vol. 114. — P. 1—28; 316—351. Mathematische Werke. — Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1959. — P. 644—707.

[22] Ikeda T. On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$ // Ann. Math. (2). — 2001. — Vol. 154. — P. 641—681.

[23] Ikeda T. Pullback of the lifting of elliptic cusp forms and Miyawaki's Conjecture // Duke Math. Journal. — 2006. — Vol. 131. — P. 469—497.

[24] Jiang D. Degree 16 standard L-function of $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GSp}(2)$. — Amer. Math. Soc. (1996). — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 588).

[25] Kurokawa N. Analyticity of Dirichlet series over prime powers // Analytic Number Theory. Proc. of the Japanese-French Symp. held in Tokyo, Japan, October 10–13, 1988 / K. Nagasaka, E. Fouvry, eds. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1434). — Berlin: Springer, 1990. — P. 168—177.

[26] Maass H. Indefinite quadratische Formen und Eulerprodukte // Comm. Pure Appl. Math. — 1976. — Vol. 19. — P. 689—699.

[27] Manin Yu. I. Selected Papers of Yu. I. Manin. — River Edge: World Scientific, 1996. — (World Sci. Ser. 20th Cent. Math.; Vol. 3).

[28] Manin Yu. I., Panchishkin A. A. Introduction to Modern Number Theory. — Berlin: Springer, 2005. — (Encycl. Math. Sci.; Vol. 49).

[29] Miyawaki I. Numerical examples of Siegel cusp forms of degree 3 and their zeta-functions // Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. Ser. A. — 1992. — Vol. 46, no. 2. — P. 307—339.

[30] Murokawa K. Relations between symmetric power L-functions and spinor L-functions attached to Ikeda lifts // Kodai Math. J. — 2002. — Vol. 25. — P. 61—71.

[31] Panchishkin A. Admissible non-Archimedean standard zeta functions of Siegel modular forms // Proc. of the Joint AMS Summer Conf. on Motives, Seattle, July 20 — August 2 1991. Vol. 2. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — P. 251—292.

[32] Panchishkin A. Motives over totally real fields and p-adic L-functions // Ann. Inst. Fourier. — 1994. — Vol. 44, no. 4. — P. 989—1023.

[33] Panchishkin A. A. A new method of constructing p-adic L-functions associated with modular forms // Moscow Math. J. — 2002. — Vol. 2, no. 2. — P. 1—16.

[34] Panchishkin A. A. Two variable p-adic L-functions attached to eigenfamilies of positive slope // Invent. Math. — 2003. — Vol. 154, no. 3. — P. 551—615.

[35] Panchishkin A. A. p-adic Banach modules of arithmetical modular forms and triple products of Coleman's families // Pure Appl. Math. Q. — 2008. — Vol. 4, no. 4. — P. 1133—1164.

[36] Panchishkin A. A., Boecherer S. Triple products of Coleman's families and their periods // Proc. of the 8th Hakuba Conf. "Periods and related topics from automorphic forms," September 25 — October 1, 2005.

[37] Panchishkin A., Vankov K. On the numerator of the symplectic Hecke series of degree three. — 2006. — `math.NT/0604602`.

[38] Panchishkin A., Vankov K. Rankin's lemma of higher genus and explicit formulas for Hecke operators. — 2006. — `arXiv:math.NT/0610417`.

[39] Shimura G. On modular correspondences for $\mathrm{Sp}(n, Z)$ and their congruence relations // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1963. — Vol. 49. — P. 824—828.

[40] Shimura G. Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.

[41] Shimura G. Arithmeticity in the Theory of Automorphic Forms. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 82).

[42] Tamagawa T. On the ζ-function of a division algebra // Ann. Math. — 1963. — Vol. 77. — P. 387—405.

[43] Tilouine J., Urban E. Several variable p-adic families of Siegel–Hilbert cusp eigenforms and their Galois representations // Ann. Sci. École Norm. Sup., Ser. 4. — 1999. — Vol. 32. — P. 499—574.

[44] Vankov K. Explicit formula for the symplectic Hecke series of genus four. — 2006. — `arXiv:math.NT/0606492`.

[45] Vo S. The spin L-function on the symplectic group $\mathrm{GSp}(6)$ // Israel J. Math. — 1997. — Vol. 101. — P. 1—71.

[46] Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem // Ann. Math. (2). — 1995. — Vol. 141, no. 3. — P. 443—455.

[47] Yoshida H. Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms // Invent. Math. — 1980. — Vol. 60. — P. 193—248.

[48] Yoshida H. Motives and Siegel modular forms // Amer. J. Math. — 2001. — Vol. 123. — P. 1171—1197.