Дифференциал Лейбница и интеграл Перрона—Стилтьеса*

Е. В. ЩЕПИН
Математический институт им. В. А. Стеклова
e-mail: scepin@mi.ras.su

УДК 517.22+517.3+517.518.12+517.518.126

Ключевые слова: дифференциал Лейбница, интеграл Перрона—Стилтьеса, бесконечно малый отрезок, монада, инфинитезимальная форма, разностная форма, интеграл Курцвейля—Хенстока.

Аннотация

Идея Лейбница о дифференциале как длине элементарного бесконечно малого отрезка (монады) реализована в форме, отвечающей современным требованиям строгости. Введённое понятие секвенциального дифференциала хорошо согласуется с общепринятыми обозначениями интегрального исчисления. Это позволило заметно упростить и обобщить конструкцию интеграла Перрона—Стилтьеса.

Abstract

E. V. Shchepin, The Leibniz differential and the Perron–Stieltjes integral, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 6, pp. 237—258.

We implement Leibniz's idea about the differential as the length of an infinitesimally small elementary interval (a monad) in the form satisfying modern standards of rigor. The concept of sequential differential introduced in this paper is shown to be in good alignment with the standard convention of the integral calculus. As an application of this concept we simplify and generalize the construction of the Perron—Stieltjes integral.

1. Введение

Исторически первое изложение математического анализа в знаменитом учебнике маркиза де Лопиталя [2] по существу имело аксиоматический характер. Среди сформулированных там аксиом исчисления бесконечно малых есть одна геометрическая, утверждающая, что всякая кривая линия представляет собой ломаную с бесконечно малыми прямолинейными звеньями. Эта аксиома Лопиталя хорошо соответствует предшествующему дифференциальному исчислению методу неделимых Кавальери, в соответствии с воззрениями которого и прямолинейный отрезок состоит не из точек, а из бесконечно малых неделимых

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 6, с. 237—258.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

отрезков. Эти представления породили ключевое понятие математического анализа — понятие дифференциала Лейбница — и основанные на этом понятии обозначения Лейбница для интеграла и производных. Замечательные обозначения Лейбница были сохранены, несмотря на пересмотр всех основ анализа. Им просто придали другой смысл, иногда весьма далёкий от оригинального. Ключевым понятием анализа бесконечно малых у Лейбница (в отличие от Ньютона) является дифференциал, через него выражаются и интеграл и производная. У Лейбница дифференциал независимой переменной представляет собой бесконечно малую константу. Дифференциал в современном изложении предмета представляет собой функцию — дифференциальную форму. Дифференциальные формы контравариантны (при замене переменной), тогда как дифференциал, который имел в виду Лейбниц и который реализован в данной статье, ковариантен.

Лейбниц полагал, что точки числовой прямой, представляющие переменную величину x, на самом деле являются бесконечно малыми отрезками фиксированной бесконечно малой длины — монадами отрезка. Длина монады обозначалась dx и называлась дифференциалом переменной x. А дифференциалом функции $f(x)$ при фиксированном x называлось изменение функции на соответствующем бесконечно малом отрезке $df(x)$.

Все эти интуитивные представления Лейбница мы облекаем в строгую форму в духе Коши, трактующего бесконечно малую величину как стремящуюся к нулю последовательность. Заметим, что «нестандартный анализ», предложивший строгую концепцию бесконечно малых величин, не предложил адекватной трактовки лейбницевского дифференциала. Монада стандартной точки в нестандартном анализе, определяемая как множество бесконечно близких точек, не имеет длины. Понятие дифференциала Лейбница естественным образом ведёт нас к построению интеграла в духе Перрона. Эта концепция интеграла представлена ниже в форме интеграла от инфинитезимальных распределений. Отметим, что такого рода распределения могут представлять также обобщённые функции. Поэтому возникшая концепция интеграла в чём-то превосходит все известные.

Дифференциальные формы при таком подходе заменяются инфинитезимальными формами, которые являются функциями, ставящими в соответствие бесконечно малым отрезкам числовые последовательности. Интегрирование инфинитезимальных форм стилтьесовского типа приводит в точности к известному понятию интеграла Перрона—Стилтьеса [6].

Заметим, что история развития понятия интеграла после Лейбница, начавшаяся с интеграла Римана и закончившаяся интегралом Курцвейля—Хенстока, в конечном итоге тоже привела к понятию дифференциала [4, 5], но только к чрезмерно усложнённому, определяемому на основе интеграла. Предложенная ниже концепция дифференциала Лейбница восстанавливает первичность дифференциала по отношению к интегралу.

А. Н. Колмогоров в [1], успешно реализовав весьма общее понятие интеграла Лейбница в форме, отвечающей современным требованиям строгости, понятия

дифференциала не ввёл, хотя дифференциал в его обозначениях тоже присутствует.

В данной работе автор стремился не столько к дальнейшим обобщениям интеграла, ограничившись интегрированием по отрезкам прямой, сколько к точности воспроизведения интуитивных представлений Лейбница, руководивших им при введении его замечательных обозначений. Важнейшим вкладом Лейбница в математику является введение обозначения $\int f(x)\,dx$ для интеграла. На первый взгляд зачем тут нужен dx? Ведь вся информация, необходимая для вычисления интеграла, уже содержится в $f(x)$. Однако наличие дифференциала в подынтегральном выражении позволяет правильно преобразовывать интеграл при замене переменной. Предлагаемая ниже концепция дифференциала прекрасно вписывается в устоявшуюся систему обозначений, возвращая им прежний простой и понятный смысл, хорошо согласующийся с общепринятым современным.

2. Структура континуума

Из чего состоит континуум: из точек или из бесконечно малых отрезков? Такого рода вопрос был весьма актуален для математиков восемнадцатого столетия. Какая собственно разница, может подумать неискушенный читатель. Вопрос какой-то философский. А разница между точкой и отрезком заключается в следующем: все размеры точки равны нулю, тогда как бесконечно малые величины могут иметь конечные отношения. Так, если увеличить все размеры вдвое, то бесконечно малый отрезок удвоит свою длину, а точка перейдёт в точку столь же безразмерную. Поэтому интуитивным представлениям Лейбница и Эйлера о континууме больше соответствовал взгляд, выраженный геометрической аксиомой Лопиталя. Позднее Дедекиндом была построена стройная теория вещественных чисел, положившая конец подобным спорам. Чаша весов, казалось окончательно, склонилась в пользу точек. Представленная ниже концепция континуума восстанавливает в правах концепцию бесконечно малых отрезков, сохраняя при этом точки. То есть предлагаемый ответ на альтернативу «точки или отрезки» таков: «и точки, и отрезки».

Инфинитезимальный отрезок

Фигурными скобками мы обозначаем множества, элементы которых представлены в этих скобках. *Бесконечно малым* или *инфинитезимальным* отрезком мы будем называть последовательность вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}$[1], длины которых стремятся к нулю. При этом последовательность длин этих

[1]Правильней было бы писать $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ или хотя бы $\{[a_k, b_k]\}_k$, но мы договоримся, что наличие индекса k в выражении, заключённом в фигурные скобки, без всякой спецификации означает, что диапазон его изменений совпадает с множеством натуральных чисел.

отрезков $\{b_k - a_k\}$ мы будем называть длиной бесконечно малого отрезка. Таким образом, длина бесконечно малого отрезка представляет собой монотонную стремящуюся к нулю числовую последовательность.

Инфинитезимальное разбиение

Через $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ мы будем обозначать множество отрезков числовой прямой, концы которых принадлежат множеству $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, а внутренности свободны от точек этого множества. Множество отрезков $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ называется *разбиением* отрезка $[a, b]$, порождённым множеством $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, если a и b являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами этого множества. Если точки множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ расположены в порядке возрастания $x_i \leqslant x_{i+1}$, то $x_0 = a$, $x_n = b$ и $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ представляет собой множество отрезков $\{[x_i, x_{i+1}]\}$.

Если множество точек обозначено одной буквой, скажем P, то порождённое им разбиение отрезка обозначаем $[P]$. Если одно множество точек содержится в другом, $P_1 \subset P_2$, и оба порождают разбиения $[P_1]$ и $[P_2]$ одного и того же отрезка, то второе разбиение называется *измельчением* второго. Последовательность измельчающихся разбиений $[P_1], \ldots, [P_n], \ldots$ отрезка $[a, b]$ называется *измельчением* этого отрезка. Последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}$ называется *монадой* измельчения $[P_1], \ldots, [P_n], \ldots$, если $I_k \in [S_k]$ при любом k. Измельчение отрезка называется *инфинитезимальным*, если все его монады бесконечно малы. Точки из объединения $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$, отличные от концов разбиваемого отрезка, называются *режущими* для измельчения $[P_1], \ldots, [P_n], \ldots$. Для каждой режущей точки x определяется её *порядок* как минимум k, таких что $x \in P_k$.

Наряду с разбиениями отрезков можно также рассматривать разбиения всей прямой и некомпактных промежутков. При этом можно рассматривать и разбиения с бесконечным числом точек фиксированного порядка. Например, положим P_0 совпадающим с множеством целых чисел $\mathbb{Z}$, а P_k определим как множество десятичных дробей вида $n/10^k$ где $n \in \mathbb{Z}$. В таком случае последовательность $\{[P_k]\}$ образует инфинитезимальное разбиение прямой, называемое *десятичным* разбиением.

Точки и монады

Если на отрезке фиксировано инфинитезимальное разбиение, то монады этого разбиения мы будем обозначать жирным шрифтом, а точки обычным. При этом будем использовать одну и ту же букву для точки и монады, имеющей её своим пределом. Например, для монады $\mathbf{x}$ её предельная точка обозначается x. Точка x, вообще говоря, неоднозначно определяет монаду $\mathbf{x}$. Однозначность есть в случае, когда предельная точка x является внутренней для всех отрезков представляющей монаду последовательности. Если же предельная точка монады

является режущей точкой разбиения, то имеется ровно две монады разбиения, имеющие её своим пределом: левая и правая.

Для инфинитезимального разбиения $[P_1], [P_2], \ldots$ отрезка $[a, b]$ и точки $x \in \in [a, b]$ обозначим через $x + 0$ последовательность, k-м членом которой является ближайшая к x и отличная от неё точка из P_k, расположенная правее x, и обозначим через $x - 0$ последовательность, k-м членом которой является ближайшая к x и отличная от неё точка из P_k, расположенная левее x. Приняв такое обозначение, мы получаем средство для обозначения различных инфинитезимальных отрезков, имеющих x своей предельной точкой. А именно, пусть $x - 0 = \{a_k\}$ и $x + 0 = \{b_k\}$. Тогда возникают три инфинитезимальных отрезка: $\{[a_k, x]\}$, $\{[x, b_k]\}$ и $\{[a_k, b_k]\}$, которые мы будем обозначать короче: $[x - 0, x]$, $[x, x + 0]$ и $[x - 0, x + 0]$ соответственно.

Если точка x является режущей точкой разбиения, то $[x - 0, x]$ и $[x, x + 0]$ совпадают начиная с некоторого номера (порядка x) с левой и правой монадами разбиения, имеющими x своей предельной точкой. Соответствующие монады называем *односторонними* и обозначаем соответственно $\mathbf{x} \pm 0$. Если же x не является ни режущей точкой разбиения, ни концом отрезка, то $[x - 0, x + 0]$ является единственной монадой разбиения, имеющей x своей предельной точкой. Такая монада называется *двусторонней*. В таком случае инфинитезимальные отрезки $[x - 0, x]$ и $[x, x + 0]$ будем называть *полумонадами*.

Монады десятичного разбиения единичного отрезка $[0, 1]$ прямой находятся во взаимно-однозначном соответствии с бесконечными десятичными дробями. При этом точки, допускающие неоднозначную десятичную запись, как раз и являются предельными для пар односторонних монад.

3. Секвенциальные распределения

Монадические распределения

Монадическим секвенциальным распределением называется отображение, ставящее в соответствие всякой монаде некоторого измельчения числовую[1] последовательность.

Важнейшим примером монадического распределения является *секвенциальный дифференциал длины*, который ставит в соответствие всякой монаде $\mathbf{x}$ её длину, т. е. последовательность длин входящих в неё отрезков, обозначаемую $d\mathbf{x}$.

Секвенциальный[2] *дифференциал функции* $f(x)$ на монаде $\mathbf{x} = \{[a_k, b_k]\}$ некоторого измельчения обозначается $df(\mathbf{x})$ и определяется как последовательность разностей $\{f(b_k) - f(a_k)\}$. Если говорить о дифференциале функции в точке, то здесь возникает неоднозначность, вызванная неоднозначным соответстви-

[1] В этой статье мы рассматриваем только действительные числа.

[2] В дальнейшем прилагательное «секвенциальный» мы будем опускать, поскольку других распределений и дифференциалов в данной статье не встречается.

ем точек и монад, что приводит к понятиям правого и левого дифференциалов в режущих точках измельчения.

Всякая числовая функция $f(x)$ на измельчаемом отрезке естественным образом порождает монадическое распределение путём постановки в соответствие монаде $\mathbf{x}$ постоянной последовательности, состоящей из значений функции в предельной точке монады. Таким образом, распределение, порождаемое функцией $f(x)$, можно описать формулой $f(\mathbf{x})_k = f(x)$ для всех k. Но для разрывных функций в точках разрыва первого рода, если эти точки являются режущими точками измельчения, более естественно определять значения функции на левой и правой монадах точки разрыва как соответственно её пределы слева и справа:

$$f(\mathbf{x}+0) = \lim_{t\to x+0} f(t) \quad \text{и} \quad f(\mathbf{x}-0) = \lim_{t\to x-0} f(t).$$

Например, для бесконечных десятичных дробей, представляющих монады десятичного измельчения прямой, логично определять целую часть как число, стоящее перед десятичной запятой, т. е. считать, что целая часть монады $0{,}9999\ldots$ равна нулю.

Монадическое распределение порождает и всякая последовательность функций $\{f_k(x)\}$. Например, монаде $\mathbf{x}$ может быть поставлена в соответствие последовательность $\{f_k(x)\}$. А поскольку последовательности функций позволяют представлять обобщённые функции, мы видим, что язык монадических распределений применим для описания вычислений, связанных с обобщёнными функциями.

Другой способ порождения монадического распределения для обычной и обобщённой функции $\alpha(x)$ следующий: монаде $\mathbf{x} = \{[a_k, b_k]\}$ ставится в соответствие последовательность средних значений $\alpha(x)$ на отрезках монады по формуле

$$\alpha(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{1}{b_k - a_k} \int\limits_{a_k}^{b_k} \alpha(x)\, dx \right\}. \tag{1}$$

Арифметические операции над монадическими распределениями определяются почленно над соответствующими последовательностями.

Таким образом, для любой пары функций $f(x)$, $g(x)$ на измельчённом отрезке определены монадические распределения $f(\mathbf{x})\, dg(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})\, dg(\mathbf{x})$.

3.1. Линейность определённого дифференциала

Рассмотрим отрезок $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ с фиксированным инфинитезимальным разбиением. Тогда, как нетрудно убедиться, для любой пары функций $f(x)$, $g(x)$ на $[a, b]$ и любых констант λ, μ при любом $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ дифференциал от линейной комбинации этих функций равен линейной комбинации их дифференциалов (линейность дифференциала):

$$d\big(\lambda f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x})\big) = \lambda\, df(\mathbf{x}) + \mu\, dg(\mathbf{x}). \tag{2}$$

3.2. Сравнение дифференциалов

Последовательность, имеющая лишь конечное число неположительных членов, называется *эвентуально неотрицательной*. Монадическое распределение называется эвентуально неотрицательным, если таковыми являются все его значения.

Лемма 3.1. *Если дифференциал функции $f(x)$ на некотором измельчении отрезка $[a,b]$ эвентуально неотрицателен, то $f(b) \geqslant f(a)$.*

Доказательство. Предположим, напротив, что $f(b) < f(a)$. Рассмотрим первое разбиение отрезка $[a,b]$ из рассматриваемого измельчения. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — последовательность концов интервалов этого разбиения. Так как $f(x_n) < f(x_0)$, то неравенства $f(x_{k+1}) \geqslant f(x_k)$ не могут быть выполнены при всех $k < n$. Следовательно, найдётся отрезок $[a_1, b_1]$ первого разбиения, для которого значение функции на правом конце меньше, чем значение на левом. Второе разбиение отрезка измельчает первое, поэтому по аналогичным соображениям внутри отрезка $[a_1, b_1]$ найдётся отрезок $[a_2, b_2]$ второго разбиения, для которого также значение на правом конце меньше значения на левом. Продолжая в том же духе, можем определить монаду $\{[a_k, b_k]\}$ с отрицательной последовательностью разностей $\{f(b_k) - f(a_k)\}$, вопреки предположению об эвентуальной неотрицательности дифференциала. □

Будем говорить, что одна числовая последовательность $\{x_k\}$ *эвентуально мажорирует* другую $\{y_k\}$, и писать $\{x_k\} \succ \{y_k\}$, если начиная с некоторого k выполнено неравенство $x_k > y_k$. Будем говорить одно монадическое распределение эвентуально мажорирует другое, если значение первого на любой монаде эвентуально мажорирует значение второго на той же монаде.

Теорема 3.1 (теорема сравнения). *Если на отрезке $[a,b]$ задано инфинитезимальное разбиение, для всех монад которого $df(\mathbf{x}) \succ dg(\mathbf{x})$, то $f(b) - f(a) \geqslant g(b) - g(a)$.*

Доказательство. Действительно, дифференциал разности $d\big(f(x) - g(x)\big)$ в этом случае неотрицателен. Поэтому на основании леммы 3.1 заключаем, что $f(b) - g(b) \geqslant f(a) - g(a)$. □

4. Интегрирование распределений

Верхний интеграл

Множество монад отрезка $[a,b]$ с фиксированным инфинитезимальным разбиением мы будем обозначать $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Верхний интеграл

$$^{*}\!\!\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Phi(\mathbf{x})$$

распределения $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, определяется как точная нижняя грань разностей $f(b) - f(a)$ для функций, дифференциалы которых эвентуально мажорируют $\Phi(\mathbf{x})$. Из теоремы 3.1 для любой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ вытекает равенство

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} df(\mathbf{x}) = f(b) - f(a). \tag{3}$$

Монотонность интеграла

Непосредственно из определения верхнего интеграла вытекает следующее правило интегрирования неравенств:

$$\text{если} \quad \Phi(\mathbf{x}) \prec \Psi(\mathbf{x}) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \text{то} \quad \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} \Phi(\mathbf{x}) \leqslant \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} \Psi(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Сублинейность верхнего интеграла

Пусть даны два инфинитезимальных распределения Φ_1 и Φ_2 на одном и том же инфинитезимальном разбиении отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Тогда

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} \big(\Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x})\big) \leqslant \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} \Phi_1(\mathbf{x}) + \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} \Phi_2(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Однородность верхнего интеграла

Для любой положительной константы λ и любого распределения $\Phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, имеет место равенство

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} \lambda\Phi(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} \Phi(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Нижний интеграл

Нижний интеграл распределения можно определить равенством

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}_{*} \Phi(\mathbf{x}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}{}^{*} -\Phi(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Свойства нижнего интеграла аналогичны свойствам верхнего. В частности, положительную константу можно выносить за знак нижнего интеграла и для нижнего интеграла также справедлива теорема об объединении интегралов. Но

нижний интеграл от суммы распределений, в противоположность верхнему, удовлетворяет противоположному неравенству:

$$\int_{*\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big(\Phi_1(\mathbf{x}) + \Phi_2(\mathbf{x})\big) \geqslant \int_{*\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Phi_1(\mathbf{x}) + \int_{*\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Phi_2(\mathbf{x}). \tag{8}$$

Интервальная аддитивность

Если $\{[P_k]\}$ — инфинитезимальное разбиение отрезка $[a, b]$, а $\{[Q_k]\}$ — инфинитезимальное разбиение отрезка $[b, c]$, то $\{[P_k \cup Q_k]\}$, очевидно, является инфинитезимальным разбиением отрезка $[a, c]$, причём монады разбиений объединяются:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cup [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}]. \tag{9}$$

Если справедливо (9), то для любого распределения $\Phi(\mathbf{x})$ на $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ выполнены равенства

$$\int_{\mathbf{a}}^{*\mathbf{b}} \Phi(\mathbf{x}) + \int_{\mathbf{b}}^{*\mathbf{c}} \Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{*\mathbf{c}} \Phi(\mathbf{x}), \quad \int_{*\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Phi(\mathbf{x}) + \int_{*\mathbf{b}}^{\mathbf{c}} \Phi(\mathbf{x}) = \int_{*\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \Phi(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Точный интеграл

Как нетрудно убедиться, для любого распределения справедливо неравенство

$$\int_{*\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Phi(\mathbf{x}) \leqslant \int_{\mathbf{a}}^{*\mathbf{b}} \Phi(\mathbf{x}). \tag{11}$$

Если верхний и нижний интегралы распределения совпадают, то распределение называется *интегрируемым*, а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется его (*точным*) *интегралом*. Точный интеграл существует для дифференциала любой функции и равен разности значений функции на концах отрезка.

Наследственность интегрируемости

Если выполнено (9), то для любого распределения $\Phi(\mathbf{x})$ в силу интервальной аддитивности односторонних интегралов имеет место равенство

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Phi(\mathbf{x}) + \int_{\mathbf{b}}^{\mathbf{c}} \Phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \Phi(\mathbf{x}), \tag{12}$$

причём данное равенство выполнено *безусловно*, т. е. существование левой части влечёт существование правой и наоборот. В частности, поэтому свойство интегрируемости *наследственно* по подотрезкам, т. е. интегрируемость на

каком-нибудь отрезке влечёт интегрируемость на любом содержащемся в нём меньшем отрезке.

Линейность интеграла

Если распределения $\Phi(\mathbf{x})$ и $\Psi(\mathbf{x})$ интегрируемы на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то для любых констант λ, μ интегрируема линейная комбинация $\lambda\Phi(\mathbf{x}) + \mu\Psi(\mathbf{x})$ и имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big(\lambda\Phi(\mathbf{x}) + \mu\Psi(\mathbf{x})\big) = \lambda \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Phi(\mathbf{x}) + \mu \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Psi(\mathbf{x}).$$

5. Интегрирование инфинитезимальных форм

Неопределённый дифференциал функции

Дифференциал функции, как мы его рассматривали выше, принимал определённые значения на монадах данного инфинитезимального разбиения отрезка. При этом формула, по которой определялся дифференциал для данной монады, не зависела от разбиения. Эта формула определяет функцию, ставящую в соответствие инфинитезимальному отрезку $\{[a_k, b_k]\}$ последовательность разностей $\{f(b_k) - f(a_k)\}$. Эту функцию инфинитезимального отрезка мы и называем *неопределённым* (*секвенциальным*) *дифференциалом функции* $f(x)$. Дифференциал функции на инфинитезимальном отрезке $\{[a_k, b_k]\}$ с предельной точкой x равен сумме своих значений на левой $\{[a_k, x]\}$ и правой $\{[x, b_k]\}$ половинах этого отрезка. Поэтому можно сузить область определения дифференциала, ограничившись рассмотрением односторонних инфинитезимальных отрезков. Односторонние отрезки хороши тем, что однозначно характеризуются своей предельной точкой и своей длиной. Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ можно определить как функцию двух переменных: точки x и последовательности приращений dx, значениями которой служат числовые последовательности, определяемые по формулам

$$f(x + dx) - f(x) \quad \text{или} \quad f(x) - f(x - dx)$$

в зависимости от того, левым или правым концом этого отрезка является точка x. Если же разрешить dx принимать отрицательные значения, то формула для дифференциала может быть унифицирована следующим образом:

$$df(x, dx) = \operatorname{sgn}(dx)\big(f(x + dx) - f(x)\big), \tag{13}$$

В дальнейшем мы, как правило, будем сокращать запись дифференциала функции до $df(x)$, не указывая явно его зависимость от dx. Таким образом, при фиксированном x дифференциал $df(x)$ представляет собой функцию от инфинитезимальной последовательности приращений. В частности, дифференциал dx

тождественной функции x представляет собой не зависящую от x тождественную функцию приращения.

Инфинитезимальные формы

Инфинитезимальной формой в точке x мы будем называть функцию, ставящую в соответствие любому инфинитезимальному отрезку, имеющему x своей граничной точкой, некоторую числовую последовательность. Основным примером инфинитезимальной формы является $f(x)\,dg(x)$ — произведение дифференциала одной функции вещественного переменного, $g(x)$, на другую, $f(x)$. При этом значение функции $f(x)$ на инфинитезимальном отрезке определяется как её значение в предельной точке этого отрезка. Мы будем называть такие формы *стилтьесовскими*.

Так как инфинитезимальные формы можно складывать, умножать и делить, то инфинитезимальной формой является любое арифметическое выражение, составленное из функций и их дифференциалов. Кроме того, если значения инфинитезимальной формы $D_1(x, dx)$ бесконечно малые, то её можно подставить вместо dx в другую инфинитезимальную форму $D_2(x, dx)$, образовав суперпозицию $D_2\big(x, D_1(x, dx)\big)$, которая также является инфинитезимальной формой.

Интеграл от инфинитезимальной формы

Для любого инфинитезимального разбиения отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ инфинитезимальная форма $D(x, dx)$ порождает монадическое распределение $D(\mathbf{x})$ по формуле

$$D(\mathbf{x}) = D(x, d[x-0, x]) + D(x, d[x, x+0]), \tag{14}$$

где через $d[x-0, x]$ и $d[x, x+0]$ обозначены длины полумонад.

В частности, неопределённый дифференциал функции $df(x)$ порождает определённый дифференциал — монадическое распределение $df(\mathbf{x})$, интеграл от которого равен разности значений функции $f(x)$ на концах отрезка для любого инфинитезимального разбиения отрезка. Это замечание приводит к следующему определению.

Инфинитезимальная форма $D(x, dx)$ называется *интегрируемой в смысле Лейбница* на $[a, b]$, если для любого инфинитезимального разбиения отрезка $[a, b]$ интегрируемо порождённое ею монадическое распределение $D(\mathbf{x})$ и все полученные для разных разбиений интегралы одинаковы. Общее значение интегралов этих распределений обозначается

$$\int\limits_a^b D(x, dx)$$

и называется *определённым интегралом* от инфинитезимальной формы $D(x, dx)$ по промежутку $[a, b]$.

Верхним интегралом инфинитезимальной формы $D(x, dx)$ по отрезку $[a, b]$ называется верхняя грань верхних интегралов по всем порождённым этой формой монадическим распределениям. Аналогично *нижним интегралом* инфинитезимальной формы $D(x, dx)$ по отрезку $[a, b]$ называется нижняя грань нижних интегралов по всем порождённым этой формой монадическим распределениям. При таких определениях, очевидно, сохраняются все обычные соотношения между односторонними интегралами.

Сравнение инфинитезимальных форм

Мы будем говорить, что инфинитезимальная форма $D_1(x, dx)$ *эвентуально мажорирует* инфинитезимальную форму $D_2(x, dx)$ в точке x, и писать $D_1(x, dx) \succ D_2(x, dx)$, если для любой бесконечно малой последовательности dx имеет место эвентуальное мажорирование $D_1(x, dx) \succ D_2(x, dx)$.

Отношение мажорирования форм $D_1(x, dx) \succ D_2(x, dx)$, выполненное при всех $x \in [a, b]$, влечёт отношение мажорирования для порождённых этими формами монадических распределений $D_1(\mathbf{x}) \succ D_2(\mathbf{x})$, которое, как непосредственно следует из определения интеграла от распределения, влечёт соответствующее неравенство для верхних, нижних и точных интегралов от этих распределений по промежутку, на котором $D_1(x, dx) \succ D_2(x, dx)$. Поэтому справедливо неравенство интегралов

$$\int\limits_a^b D_1(x, dx) \geqslant \int\limits_a^b D_2(x, dx).$$

Линейность и аддитивность

Линейность и интервальная аддитивность интеграла для инфинитезимальных форм аналогичны соответствующим свойствам интегралов от распределений и непосредственно из них вытекают.

6. Преобразования интеграла

Интегрирование по частям

Для любых функций, как нетрудно проверить, выполнено тождество

$$f(x)\,dg(x) = g(x)\,df(x) + d\big(f(x)g(x)\big) + df(x)\,dg(x), \tag{15}$$

из которого для интеграла Лейбница немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть*

$$\int\limits_a^b |df(x)\,dg(x)| = 0.$$

Тогда стилтьесовская форма $f(x)\,dg(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, если и только если интегрируема стилтьесовская форма $g(x)\,df(x)$, и имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(x)\,df(x). \tag{16}$$

Для классического интеграла Римана—Стилтьеса соответствующая теорема звучит точно так же, но без условия на интеграл произведения дифференциалов. Дело в том, что само существование интеграла Римана—Стилтьеса

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$$

уже влечёт обращение в нуль интеграла Лейбница

$$\int\limits_a^b df(x)\,dg(x),$$

что нетрудно доказать на основе представления интеграла в виде предела интегральных сумм, как это сделано в последнем разделе настоящей работы. Если же $f(x)$ непрерывна, т. е. $df(x,dx)$ бесконечно мало при бесконечно малом dx и $x \in [a,b]$, а $g(x)$ имеет конечную вариацию, т. е. $\int\limits_a^b |dg(x)| < \infty$ (стандартные условия, обеспечивающие существование интеграла Римана—Стилтьеса), то равенство

$$\int\limits_a^b |df(x)\,dg(x)| = 0 \tag{17}$$

вытекает из интегрирования эвентуального неравенства

$$|df(x)\,dg(x)| \prec \varepsilon |dg(x)|,$$

справедливого для любого $\varepsilon > 0$ с последующим устремлением ε к 0.

Замена переменной интегрирования

Теорема 6.2. *Пусть $x(t)$ — возрастающее непрерывное отображение, такое что $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$. Тогда имеет место равенство*

$$\overset{*}{\int\limits_{x_0}^{x_1}} D(x,dx) = \overset{*}{\int\limits_{t_0}^{t_1}} D\big(x(t), dx(t,dt)\big).$$

Доказательство. Рассмотрим инфинитезимальное разбиение отрезка $[\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1]$. Его образ при $x(t)$ является инфинитезимальным разбиением образа $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$.

При данном $\varepsilon > 0$ фиксируем функцию $g(x)$, такую что для всех $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$

$$D(\mathbf{x}) \prec dg(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad {}^*\!\!\int\limits_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} D(\mathbf{x}) + \varepsilon > g(x_1) - g(x_0).$$

Тогда для всех $\mathbf{t} \in [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2]$ получаем, что

$$D\big(x(\mathbf{t}), dx(\mathbf{t}, d\mathbf{t})\big) \prec dg\big(x(\mathbf{t})\big) \quad \text{и} \quad {}^*\!\!\int\limits_{\mathbf{t}_0}^{\mathbf{t}_1} D\big(x(\mathbf{t})\big) + \varepsilon > g\big(x(t_1)\big) - g\big(x(t_0)\big).$$

Ввиду произвольности ε и равенства $g\big(x(t_1)\big) - g\big(x(t_0)\big) = g(x_1) - g(x_0)$ отсюда следует совпадение интегралов

$$ {}^*\!\!\int\limits_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} D(\mathbf{x}) = {}^*\!\!\int\limits_{\mathbf{t}_0}^{\mathbf{t}_1} D\big(x(\mathbf{t})\big).$$

Следовательно, множества чисел, представляющих верхние интегралы рассматриваемых форм по различным инфинитезимальным разбиениям соответствующих отрезков совпадают. А значит, совпадают и их супремумы, т. е.

$$ {}^*\!\!\int\limits_{t_0}^{t_1} D\big(x(t), dx(t, dt)\big)$$

совпадает с интегралом

$$ {}^*\!\!\int\limits_{x_0}^{x_1} D(x, dx). \qquad \square$$

Замена дифференциала

Теорема 6.3. *Если*

$$ {}^*\!\!\int\limits_{a}^{b} |g(x)|\, dx < \infty,$$

то для любой дифференцируемой функции $f(x)$ справедливо равенство интегралов Лейбница

$$ {}^*\!\!\int\limits_{a}^{b} g(x) f'(x)\, dx = {}^*\!\!\int\limits_{a}^{b} g(x)\, df(x).$$

Доказательство. Для положительного ε имеют место следующие неравенства для инфинитезимальных форм:

$$-\varepsilon\, dx \prec f'(x)\, dx - df(x) \prec \varepsilon\, dx. \tag{18}$$

Отсюда следует, что

$$-\varepsilon|g(x)|\,dx \prec g(x)f'(x)\,dx - g(x)\,df(x) \prec \varepsilon|g(x)|\,dx. \tag{19}$$

В результате получаем, что

$$g(x)f'(x)\,dx \prec g(x)\,df(x) + \varepsilon|g(x)|\,dx.$$

Интегрирование этого неравенства даёт

$$\int\limits_a^b{}^* g(x)f'(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b{}^* g(x)\,df(x) + \varepsilon\int\limits_a^b{}^* |g(x)|\,dx.$$

Предельный переход в этом неравенстве при $\varepsilon \to 0$ даёт

$$\int\limits_a^b{}^* g(x)f'(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b{}^* g(x)\,df(x). \tag{20}$$

С другой стороны, из (19) можно получить и противоположное неравенство

$$g(x)\,df(x) \prec g(x)f'(x)\,dx + \varepsilon|g(x)|\,dx,$$

интегрирование которого с последующим предельным переходом даёт неравенство, противоположное (20). □

Теоремы о замене переменной в инфинитезимальной форме и теорема о замене дифференциала вместе позволяют доказать следующую формулу замены переменной в интеграле от функции:

$$\int\limits_a^b{}^* f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta{}^* f\big(x(t)\big)x'(t)\,dt, \tag{21}$$

в случае когда $x(t)$ является возрастающим отображением интервала $[\alpha,\beta]$ на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b{}^* |f(x)|\,dx < \infty.$$

В частности, при $f(x)$, тождественно равной единице, получаем формулу Ньютона—Лейбница.

Следствие 6.4. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то стилтьесовская форма $f'(x)\,dx$ интегрируема на этом отрезке по Лейбницу и имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

7. Интегрирование разностных форм

Разностные формы

Основной интерес для интегрирования представляют инфинитезимальные формы, которые порождены разностными формами. Разностной формой мы будем называть вещественную функцию $D(x, \Delta x)$ двух вещественных переменных, первая из которых именуется (*базисной*) *точкой*, а вторая — *приращением*. Например, через $\Delta f(x)$ обозначается (неопределённая) разность функции $f(x)$, определяемая по формуле $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Для пары функций $f(x)$, $g(x)$ определяется стилтьесовская разностная форма $f(x)\Delta g(x)$. Всякая разностная форма $D(x, \Delta x)$ порождает инфинитезимальную форму $D^*(x, dx)$ по формуле

$$D^*(x, dx) = \{D(x, dx_k)\}_{k=1}^{\infty}, \tag{22}$$

где $dx = \{dx_k\}$, так что инфинитезимальная стилтьесовская форма $f(x)\,dg(x)$ порождена соответствующей разностной формой.

Лемма 7.1. *Если инфинитезимальные формы $D_1^*(x, dx)$ и $D_2^*(x, dx)$ порождены разностными формами $D_1(x, \Delta x)$ и $D_2(x, \Delta x)$ соответственно и $D_1^*(x, dx) \prec D_2^*(x, dx)$ в точке x, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого δ, такого что $|\delta| \leqslant \varepsilon$,*

$$D_1(x, \delta) \leqslant D_2(x, \delta).$$

Доказательство. Предположение противного приводит к существованию стремящейся к нулю последовательности $\{\delta_k\}$, для элементов которой выполнено противоположное неравенство. Из этой последовательности можно выбрать монотонно убывающую подпоследовательность, на которой будет нарушено условие эвентуального доминирования инфинитезимальных форм. □

Будем говорить, что разностная форма $D_1(x, \Delta x)$ *инфинитезимально мажорирует* другую разностную форму $D_2(x, \Delta x)$ в точке x, и писать $D_1(x, \Delta x) \succ D_2(x, \Delta x)$, если найдётся такое $\varepsilon > 0$, что при всех $\delta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ имеет место неравенство

$$D_1(x, \delta) \geqslant D_2(x, \delta). \tag{23}$$

По лемме 7.1 инфинитезимальное мажорирование для разностных форм равносильно эвентуальному мажорированию соответствующих инфинитезимальных форм.

Интеграл Перрона—Стилтьеса разностной формы

Определим верхний интеграл Перрона—Стилтьеса разностной формы $D(x, \Delta x)$ следующим образом:

$$\overset{*}{\int_a^b} D(x, \Delta x) = \inf\{F(b) - F(a) \mid \Delta F(x) \succ D(x, \Delta x)\}, \tag{24}$$

где нижняя грань берётся по всем *мажорантам* формы (так называются функции, для которых разность инфинитезимально мажорирует эту форму). Нижний и точный интегралы Перрона—Стилтьеса определяются на основе верхнего обычным образом.

Теорема 7.1. *Верхний интеграл Перрона—Стилтьеса разностной формы $D(x, \Delta x)$ равен верхнему интегралу Лейбница от ассоциированной инфинитезимальной формы $D^*(x, dx)$.*

Доказательство. Если

$$\Delta F(x) \succ D(x, \Delta x)$$

для всех $x \in [a, b]$, то

$$dF(x) \succ D^*(x, dx)$$

по лемме 7.1. Следовательно, для любого инфинитезимального разбиения отрезка $[a, b]$ получим неравенство

$$\mathbf{{}^*\!\int_a^b} D(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) \leqslant F(b) - F(a),$$

из которого ввиду произвольности $F(x)$ и разбиения следует неравенство интегралов

$$\mathbf{{}^*\!\int_a^b} D(x, dx) \leqslant \mathbf{{}^*\!\int_a^b} D(x, \Delta x).$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим верхний интеграл Лейбница от инфинитезимальной формы

$$F(y) = \mathbf{{}^*\!\int_a^y} D^*(x, dx)$$

как функцию верхнего предела. Тогда при любом положительном ε дифференциал от $F(y) + \varepsilon y$ будет инфинитезимально мажорировать $D(x, \Delta x)$ и, следовательно, позволит оценить сверху интеграл от разностной формы интегралом от инфинитезимальной плюс $\varepsilon(b-a)$. Устремляя ε к нулю, заключаем, что интеграл разностной формы не превосходит интеграла от соответствующей инфинитезимальной. □

Как следствие доказанной теоремы мы немедленно получаем, что интегрируемость разностной формы в смысле Перрона—Стилтьеса равносильна интегрируемости порождённой ею инфинитезимальной формы в смысле Лейбница и что интегралы Перрона—Стилтьеса и Лейбница для соответствующих форм совпадают.

8. Интеграл как предел интегральных сумм

Интеграл Курцвейля—Хенстока

Интегральные суммы Римана и Римана—Стилтьеса в конечном счёте оказались достаточны для теории интеграла функций одной переменной. Проблема сходимости интегральных сумм к интегралу была решена конструкцией фильтра переменного масштаба Курцвейля—Хенстока, обеспечивавшего эту сходимость. При интегрировании форм, отличных от стилтьесовских, например формы $df(x)\,dg(x)$, на первый взгляд, не возникает потребности в использовании разметки на разбиениях и потому неясно, каким фильтром следует пользоваться. Оказывается, и в этой ситуации разметка нужна. Она не влияет на интегральные суммы, но позволяет контролировать размеры отрезков разбиения, чтобы обеспечить сходимость интегральных сумм.

Функцию, ставящую в соответствие каждому отрезку разбиения некоторую (отмеченную) точку этого отрезка, мы будем называть*разметкой* разбиения. Будем называть *размеченным разбиением* пару, состоящую из разбиения и его разметки. Отмеченную в отрезке I точку мы будем обозначать I^*.

Масштабом (см. [3]) на некотором множестве называем любую неотрицательную функцию на этом множестве. Если же функция не принимает нулевых значений, то она называется положительным масштабом. Один масштаб, $\delta_1(x)$, меньше другого, $\delta_2(x)$, если неравенство $\delta_1(x) < \delta_2(x)$ выполнено при всех x из рассматриваемого множества.

Масштабом размеченного разбиения отрезка $[a, b]$ будем называть функцию на этом отрезке, принимающую вне отмеченных точек разбиения нулевое значение и принимающую в отмеченных точках значение, равное максимальному расстоянию от отмеченной точки до концов того отрезка, в котором она отмечена. Масштаб размеченного разбиения $[P]^*$ обозначим $[P]^*(x)$.

Определим значение разностной формы $D(x, \Delta x)$ на отрезке $I = [c, d]$, содержащем базисную точку x, следующим образом:

$$D(x, I) = D(x, d - x) + D(x, c - x). \tag{25}$$

Пусть дано разбиение $[P]$ отрезка $[a, b]$ с разметкой $*$. *Интегральной суммой* по этому размеченному разбиению для разностной формы $D(x, \Delta x)$ называется сумма вида

$$\sum_{I \in [S]} D(I^*, I). \tag{26}$$

Разностная форма $D(x, \Delta x)$ называется*интегрируемой по Курцвейлю—Хенстоку* к интегралу I, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой положительный масштаб $\delta(x)$, что интегральная сумма этой формы по любому размеченному разбиению меньшего масштаба отличается от I меньше чем на ε.

Топология на масштабах

Определим топологию на множестве всех масштабов, порождённую открытыми множествами вида $\{\delta'(x) \mid \delta'(x) < \delta(x)\}$, где $\delta(x)$ представляет собой произвольный положительный масштаб.

Обозначим через $0(x)$ нулевой масштаб, т. е. функцию, тождественно равную нулю. Тогда интеграл Курцвейля—Хенстока определится как предел интегральных сумм

$$\int\limits_a^b D(x, \Delta x) = \lim_{[P]^*(x) \to 0(x)} \sum_{I \in [P]} D(I^*, I). \tag{27}$$

Пусть $Q*$ обозначает некоторое множество содержащихся в отрезке $[a, b]$ неперекрывающихся отрезков с отмеченными точками. Мы будем говорить, что $Q*$ содержится в размеченном разбиении $[P]^*$ этого отрезка, и писать $Q^* \subset [P]^*$, если $[P]$ содержит Q и разметки из $[P]^*$ и Q^* совпадают на всех отрезках из Q. Через $Q^*(x)$ обозначим масштаб Q^*, т. е. функцию, отличную от нуля только в отмеченных точках из Q^*.

Лемма 8.1. *Если форма $D(x, \Delta x)$ интегрируема на $[a, b]$ в смысле Курцвейля—Хенстока, то для любого множества неперекрывающихся размеченных отрезков Q^* справедливо соотношение*

$$\lim_{[P]^*(x) \to Q^*(x)} \sum_{I \in [P]} D(I, I^*) = \sum_{I \in [P] \setminus Q} \int\limits_I D(x, \Delta x) + \sum_{I \in Q^*} D(I, I^*),$$

где предел берётся по множеству $\{P \mid [P]^* \supset Q^*\}$.

Доказательство. Прежде всего нужно убедиться в том что интегрируемость по Курцвейлю—Хенстоку наследственна по подотрезкам. Дальнейшее доказательство представляет собой упражнение в раскрытии определений. □

От интеграла Лейбница к интегралу Курцвейля—Хенстока

Лемма 8.2. *Если $D_1^*(x, dx) \prec D_2^*(x, dx)$ для всякого $x \in [a, b]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует положительный масштаб $\delta(x)$, такой что интегральная сумма по любому размеченному разбиению меньшего масштаба для разностной формы $D_1(x, \Delta x)$ не превосходит аналогичной суммы для разностной формы $D_2(x, \Delta x)$.*

Доказательство. Для всякой точки x в силу условия $D_1^*(x, dx) \prec D_2^*(x, dx)$ и леммы 7.1 найдётся такое $\delta(x)$, что для всякого $x \in [a, b]$ при $|\beta| < \delta(x)$ выполнено неравенство

$$D_1(x, \beta) \leqslant D_2(x, \beta). \tag{28}$$

В таком случае всякое слагаемое интегральной суммы формы D_1 будет не больше соответствующего слагаемого для формы D_2. Поэтому соответствующее неравенство будет выполнено и для сумм. □

Теорема 8.1. *Если инфинитезимальная форма $D^*(x, dx)$ интегрируема в смысле Лейбница, то порождающая её разностная форма $D(x, \Delta x)$ интегрируема в смысле Курцвейля—Хенстока и равны интегралы*

$$\int_a^b D(x, \Delta x) = \int_a^b D^*(x, dx).$$

Доказательство. Пусть $dF(x) \succ D^*(x, dx) \succ dG(x)$ являются ε-близкими мажорантой и минорантой нашей формы. Такие существуют, поскольку она интегрируема. По лемме 8.2 можем найти пару положительных масштабов $\delta_1(x)$ и $\delta_2(x)$, первый из которых обеспечивает для разбиений меньшего масштаба оценку сверху для интегральных сумм Римана—Стилтьеса не выше, чем лейбницевский интеграл $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ плюс ε, а второй — оценку снизу величиной $\int_a^b f(x)\,dg(x) - \varepsilon$. Ввиду произвольности ε это и означает стремление интегральных сумм к лейбницевскому интегралу при стремлении масштаба к нулю. □

От интеграла Курцвейля—Хенстока к интегралу Перрона—Стилтьеса

Доказательство обратной теоремы проходит точно по схеме доказательства теоремы 9.12 из [3] об эквивалентности интеграла Перрона интегралу Курцвейля—Хенстока, только вместо формы $f(x)\Delta x$ берётся произвольная разностная форма. Для удобства читателя мы приведём это доказательство.

Лемма 8.3 (С. Сакс, Р. Хенсток). *Если форма $D(x, \Delta x)$ интегрируема на $[a, b]$ и положительный масштаб $\delta(x)$ таков, что для любого размеченного разбиения $[P]^*$ меньшего масштаба при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство* (29)

$$\left| \sum_{I \in [P]} D(I^*, I) - \int_a^b D(x, \Delta x) \right| \leqslant \varepsilon, \tag{29}$$

то для любого размеченного разбиения $[P]^*$ масштаба меньше $\delta(x)$ и любого подмножества $P_1^* \subset [P]^*$ также выполнено неравенство

$$\left| \sum_{I \in P_1^*} \left(D(I^*, I) - \int_I D(x, \Delta x) \right) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{P}_1$ отмеченных разбиений отрезка $[a, b]$, содержащих P_1^*. Согласно лемме 8.1 предел по этому множеству при условии $P(x) \to P_1^*(x)$ интегральных сумм формы $D(x, \Delta x)$ равен смешанной сумме, разность которой с интегралом формы по всему отрезку $[a, b]$ как раз равна левой части неравенства (30). Этот предел не может быть больше ε, поскольку все интегральные суммы по разбиениям масштаба, меньшего указанного в условии, удовлетворяют неравенству (29). □

Лемма 8.4 (А. Н. Колмогоров, Р. Хенсток). *Пусть форма $D(x, \Delta x)$ интегрируема на $[a, b]$ и масштаб $\delta(x)$ таков, что при некотором $\varepsilon > 0$ для любого размеченного разбиения $[P]^*$ этого отрезка меньшего масштаба выполнено неравенство* (29). *Тогда для любого размеченного разбиения $[P]^*$ этого отрезка меньшего масштаба также выполнено неравенство*

$$\sum_{I \in [P]} \left| D(I^*, I) - \int\limits_a^b D(x, \Delta x) \right| \leqslant 2\varepsilon. \tag{31}$$

Доказательство. Положим

$$P_1^* = \left\{ I \in [P]^* \;\middle|\; D(I^*, I) \geqslant \int\limits_I D(x, \Delta x) \right\}$$

и P_2^* определим как дополнение до P_1^* в $[P]^*$. Применяя лемму Сакса—Хенстока поочередно к P_1^* и к P_2^* и складывая полученные неравенства, получаем нужный результат. □

Теорема 8.2. *Если разностная форма интегрируема в смысле Курцвейля—Хенстока, то она интегрируема в смысле Перрона—Стилтьеса.*

Доказательство. При доказательстве этой теоремы интеграл от разностной формы всюду понимается в смысле Курцвейля—Хенстока. Пусть $D(x, \Delta x)$ интегрируема по Хенстоку, и нам дано $\varepsilon > 0$. Найдём такой масштаб $\delta(x)$, что интегральные суммы по разбиениям меньшего масштаба отличаются от интеграла меньше чем на ε. Определим функцию

$$H(t) = \sup_{[P_t]^*} \sum_{I \in [P_t]^*} \left| D(I^*, I) - \int\limits_I D(x, \Delta x) \right|, \tag{32}$$

где супремум берётся по всем размеченным разбиениям отрезка $[a, t]$ масштаба $[P]^*(x) < \delta(x)$. Положим $H(a) = 0$. Тогда $H(x)$ — неубывающая функция. Из леммы Колмогорова—Хенстока вытекает, что

$$0 \leqslant H(x) \leqslant 2\varepsilon. \tag{33}$$

Зафиксируем произвольную точку $\theta \in [a, b]$. Если

$$\theta \in [x_1, x_2] \subset [\theta - \delta(\theta), \theta + \delta(\theta)],$$

то

$$H(x_1) + \left| D(\theta, [x_1, x_2]) - \int\limits_{x_1}^{x_2} D(x, \Delta x) \right| \leqslant H(x_2). \tag{34}$$

В самом деле, заменив $H(x_1)$ в этом неравенстве на сколь угодно близкую сумму типа (32), мы получим в левой части сумму этого типа уже для $H(x_2)$.

Если через $F(x)$ обозначить интеграл

$$\int\limits_a^x D(t, \Delta t),$$

то неравенство (34) влечёт эвентуальное неравенство для инфинитезимальных форм

$$|D^*(x, dx) - dF(x)| \prec dH(x),$$

откуда следует, что

$$dF(x) + dH(x) \succ D^*(x, dx) \succ dF(x) - dH(x).$$

Таким образом, $d\big(F(x) \pm H(x)\big)$ представляют собой миноранту и мажоранту формы $D^*(x, dx)$ со сколь угодно малой разностью согласно (33), что и влечёт её интегрируемость к $F(b) - F(a)$. $\square$

Таким образом, мы установили эквивалентность подходов к определению интеграла от разностной формы с помощью интегральных сумм (Римана—Стилтьеса—Курцвейля—Хенстока) и дифференциалов (Лейбница—Перрона—Стилтьеса).

Литература

[1] Колмогоров А. Н. Исследование понятия интеграла // Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985. — С. 96—136.

[2] Де Лопиталь Г. Ф. А. Анализ бесконечно малых. — М.: ГТТИ, 1935.

[3] Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П. Обобщённые интегралы. — М.: Либроком, 2011.

[4] Leader S. What is a differential? A new answer from the generalized Riemann integral // Am. Math. Month. — 1986. — Vol. 93, no. 5. — P. 348—356.

[5] Leader S. The Kurzweil—Henstock Integral and Its Differential: A Unified Theory of Integration on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$. — Chapman & Hall/CRC, 2001. — (Pure Appl. Math.; Vol. 242).

[6] Ward A. J. The Perron—Stieltjes integral // Math. Z. — 1936. — Bd. 41. — S. 578—604.